UNIVERSITE DE PARIS VI

---

**THESES**

présentées pour l'obtention du titre
de DOCTEUR de l'UNIVERSITE de PARIS
(mention Sciences)

par

M. Kunihiko KODERA

---

Sujet de la 1ère Thèse

# ANALYSE NUMERIQUE DE SIGNAUX GEOPHYSIQUES NON-STATIONNAIRES

Sujet de la 2ème Thèse

# DIAGNOSTIC DU PLASMA MAGNETOSPHERIQUE A PARTIR DES EMISSIONS UBF NATURELLES
## CARACTERISTIQUES NECESSAIRES DES EQUIPEMENTS D'ANALYSE DE CES ONDES

---

soutenues le 27 janvier 1976 devant la Commission composée de :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | J. DELLOUE | Président |
| | M. GARNIER | Examinateur |
| | R. GENDRIN | Examinateur |
| | J.L. LACOUME | Examinateur |
| | L.R.O. STOREY | Examinateur |

UNIVERSITE DE PARIS VI

---

**THESES**

présentées pour l'obtention du titre
de DOCTEUR de l'UNIVERSITE de PARIS
(mention Sciences)

par

M. Kunihiko KODERA

---

Sujet de la 1ère Thèse

# ANALYSE NUMERIQUE DE SIGNAUX GEOPHYSIQUES NON-STATIONNAIRES

Sujet de la 2ème Thèse

# DIAGNOSTIC DU PLASMA MAGNETOSPHERIQUE A PARTIR DES EMISSIONS UBF NATURELLES
## CARACTERISTIQUES NECESSAIRES DES EQUIPEMENTS D'ANALYSE DE CES ONDES

---

soutenues le 27 janvier 1976 devant la Commission composée de :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | J. DELLOUE | Président |
| | M. GARNIER | Examinateur |
| | R. GENDRIN | Examinateur |
| | J.L. LACOUME | Examinateur |
| | L.R.O. STOREY | Examinateur |

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A Michiko

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548102_0023

# ANALYSE NUMERIQUE DE SIGNAUX GEOPHYSIQUES NON-STATIONNAIRES

1ère Partie

REPRESENTATION D'UN SIGNAL DANS LE PLAN TEMPS-FREQUENCE

2ème Partie

REPRESENTATIONS COMPLEXES D'UN SIGNAL POLARISE

par

Kunihiko KODERA

Janvier 1976

# PREMIERE PARTIE

## REPRESENTATION D'UN SIGNAL DANS LE PLAN TEMPS-FREQUENCE


1.1. INTRODUCTION

1.2. PRINCIPES

- 1.2.1. METHODE DE LA FENETRE GLISSANTE
- 1.2.2. METHODE MODIFIEE (MMWM)
- 1.2.3. DISTRIBUTION DE DENSITE D'ENERGIE
- 1.2.4. INFLUENCE DU FILTRE
- 1.2.5. EXEMPLES ANALYTIQUES
  - 1.2.5.1. SIGNAL DISPERSE LINEAIREMENT EN FREQUENCE
  - 1.2.5.2. SIGNAL D'AMPLITUDE VARIABLE
  - 1.2.5.3. INTERPRETATION DE MMWM AU SENS DE LA MODELISATION LOCALE D'UN SIGNAL.

1.3. APPLICATION

- 1.3.1. METHODE PRATIQUE DE CALCUL
- 1.3.2. EXEMPLE DE SIGNAUX ARTIFICIELS
  - 1.3.2.1. RESTITUTION D'UNE LOI FREQUENCE-TEMPS DONNEE A PRIORI
  - 1.3.2.2. ADDITION DU BRUIT BLANC AU SIGNAL
  - 1.3.2.3. RESOLUTION EN FREQUENCE
  - 1.3.2.4. SIGNAUX MULTIPLES A MODULATION DE FREQUENCE
- 1.3.3. EXEMPLE DE SIGNAUX NATURELS

1.4. INTERET ET LIMITE DE LA METHODE

1.5. APPENDICE

1.5.1. RELATION ENTRE PHASE DU SIGNAL FILTRE, FREQUENCE INSTANTANEE ET TEMPS DE GROUPE.

1.5.2. LES DIFFERENTES FORMES DE LOIS TEMPS-FREQUENCE

1.5.3. DENSITE D'ENERGIE DONNEE PAR LA METHODE MMWM POUR UN SIGNAL DISPERSE LINEAIREMENT.

* *

## 1.1. INTRODUCTION

Le problème de trouver, pour des signaux non stationnaires, une représentation dans le plan temps-fréquence qui échappe à la contrainte $\Delta f.\Delta t \sim 1$ (où $\Delta f$ et $\Delta t$ sont les résolutions en fréquence et en temps) est très ancien. Il a reçu un regain d'intérêt pour les études de modélisation de signaux de différentes origines (bruits électromagnétiques naturels d'origine magnétosphérique, cris d'animaux, échos sonores se propageant dans un milieu diffusant, bruits engendrés par des véhicules en déplacement, etc...) et de nombreux colloques y ont été consacrés. ⁂

On s'aperçoit rapidement que si le signal peut s'exprimer par une loi de fréquence instantanée

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ A(t) \exp\left[-2\pi j \int f_i(t)dt \right] \right\}$$

ou par une loi de temps de groupe

$$X(f) = B(f) \exp\left[2\pi j \int \tau_g(f)df\right]$$

dans lesquelles $x(t)$ et $X(f)$ représentent le signal et sa transformée de Fourier, on peut le reconstruire sans peine a posterio par une analyse appropriée. C'est ce que Berthomier et ses collaborateurs se sont attachés à faire, soit par des méthodes analogiques, travaillant presque en temps réel, soit par des méthodes numériques, de plus grande précision (Berthomier, 1975a ;

⁂ Signalons, pour la seule année 1975, les colloques nationaux du CNFRS et du GRETSI en France, et les Symposia internationaux de l'URSI et de l'UGGI.

Berthomier et Cornilleau-Wehrlin, 1975b ; Riguet, 1974).

Mais le signal n'est pas exprimable a priori par de telles lois, il faut commencer par le modéliser. Plusieurs méthodes ont été proposées.

Gabor (1946) a proposé de développer le signal sur une base discrète de signaux élémentaires gaussiens occupant une surface $\Delta f.\Delta t \sim 1$. Lacoume (1975) envisage de développer le signal sur une base de fonctions sphéroïdales aplaties, dans un domaine de surface $\Delta f.\ \Delta t < 1$ ⁂.

De son côté, Montgomery (1967) a montré que le développement d'un signal sur une base de signaux élémentaires peut s'effectuer sous une forme continue sans difficulté. Ses résultats démontrent que la méthode classique d'analyse numérique à l'aide d'une fenêtre glissante (Dziewonski et al., 1969 ; Gokhberg et al., 1974) ou son équivalent analogique, la représentation par sonagramme, sont en fait des opérations similaires. En fait, le résultat de la méthode de la fenêtre glissante revient à représenter le module carré des coefficients du développement, coefficients qui sont, en général, complexes. Une méthode d'analyse utilisant également des arguments de ces coefficients a été proposée récemment (Kodera et de Villedary, 1975 ; Kodera et al. 1975).

Enfin, une autre approche de modélisation des signaux consiste en la représentation de leur spectre de puissance à l'aide d'un nombre fini de pôles dans le plan complexe des fréquences. Dans le cas des signaux stationnaires, cette représentation a été

⁂ Noter qu'en réduisant les dimensions du domaine $\Delta f.\Delta t$, on perd l'avantage qu'avaient les fonctions sphéroïdales par rapport aux fonctions gaussiennes, de constituer un système orthogonal.

appliquée en liaison avec la méthode dite d'entropie maximale (Smylie et al.,1973 ; Ulrych et Bishop, 1975).Elle a été étendue récemment au cas de signaux non stationnaires (Griffiths 1975).

Comme dans l'analyse et l'interprétation des émissions magnétosphériques (UBF ou TBF) naturelles, la loi de variation "fréquence-temps" peut renseigner à la fois sur les mécanismes de génération de ces signaux dans le plan équatorial géomagnétique, et sur leurs conditions de propagation jusqu'au sol, nous avons essayé d'affiner les méthodes de détermination de telles lois et d'élaborer au mieux une méthode qui restitue l'allure de la loi fréquence-temps (la loi amplitude-temps présente en effet moins d'intérêt, au stade linéaire du phénomène de génération tout au moins).

Dans un premier paragraphe, nous exposons la méthode de la fenêtre glissante (moving window method, ou MWM), à laquelle on adjoint la notion de centre de gravité de la représentation temporelle ou fréquentielle. On montre d'ailleurs que cette notion, appliquée à l'intérieur du domaine $\Delta F, \Delta T$, où les réponses temporelle et fréquentielle du filtre d'analyse ne sont pas nulles, rejoint les concepts de fréquence instantanée et de temps de groupe développés par Berthomier (1975 ). On s'attache à clarifier le concept de densité d'énergie dans le plan f-t, et à montrer la variabilité des représentations possibles d'un signal en fonction de critères donnés a priori.

Ensuite, nous examinons l'influence de la largeur du filtre utilisé, en fonction des caractéristiques du signal (largeur de bande B et durée T).

Dans un deuxième paragraphe, plusieurs applications de la méthode sont présentées. D'abord nous discutons son application pratique au cas d'enregistrements digitalisés, qui obligent à effectuer certaines moyennes que l'on adaptera au mieux des critères de précision demandés en amplitude et en fréquence. Puis nous montrons, sur une série de signaux engendrés artificiellement sur calculateur, la puissance de la méthode. Enfin, nous appliquons celle-ci à quelques signaux naturels enregistrés dans la gamme UBF, afin d'en démontrer l'intérêt pratique.

Dans une brève conclusion, nous dégageons l'intérêt et les limites de la méthode.

:: ::

## 1.2. PRINCIPE

Dans ce chapitre, nous décrivons le principe d'une méthode d'analyse fondée sur la méthode de la fenêtre glissante, mais modifiée par l'introduction de l'information de phase. D'abord nous exposons sommairement la méthode de la fenêtre glissante, puis nous décrivons la modification principale introduite et nous définissons la distribution de densité d'énergie associée à cette méthode modifiée. Nous examinons ensuite l'influence du choix du filtre utilisé dans la méthode. Finalement nous donnons des exemples de calcul avec un signal dispersé linéairement, pour illustrer les caractéristiques des deux méthodes et nous étudions leur différence vis-à-vis des problèmes de modélisation et de restitution d'un signal.

### 1.2.1. METHODE DE LA FENETRE GLISSANTE (MOVING WINDOW METHOD)

Cette méthode consiste en la décomposition du signal avec des séries de filtres fréquentiels et leur fenêtre temporelle associée. Le signal, filtré à la fréquence $f_o$ et au temps $t_o$, peut être exprimé symétriquement par une intégration ⁂ en fréquence ou en temps.

$$(1)\quad \begin{cases} s_f\ (t_o,f_o) = \int X\ (f).\ H(f - f_o)\ \exp\ [2\pi j\ f\ t_o]\ df \\ \\ \qquad\qquad = \exp\ [2\pi\ j\ f_o\ t_o] \quad \int x(t)\ h\ (t_o-t)\cdot \\ \qquad\qquad\quad \exp\ [-2\ \pi j\ f_o t]dt \end{cases}$$

avec

- x (t) : signal (forme d'onde)
- X (f) : spectre du signal
- h (t) : réponse impulsionnelle du filtre
- H (f) : fonction de transfert du filtre
- X (f) et H (f) sont les transformées de Fourier de x(t) et h (t)

Après le filtrage, la puissance du signal filtré, $|s_F\ (t_o,f_o)|^2$ , est associée, dans le plan t - f, au point $t_o$, $f_o$.

Cette méthode est appelée plus précisément "méthode de la fenêtre fréquentielle", puisque l'on commence par la décomposition du signal dans le domaine des fréquences. Il existe une autre méthod appelée "méthode de la fenêtre temporelle", qui donne un résultat équivalent bien que, dans ce dernier cas, on commence par la décomposition du signal dans le domaine temps.

⁂ lorsque les bornes d'intégration ne sont pas précisées, le calcul de l'intégrale est effectué entre $-\infty$ et $+\infty$ .

$$(2)\begin{cases} S_T(t_o,f_o) = \int x(t).\, w(t-t_o).\, \exp\,[-2\pi j\, f_o t]\, dt \\ \\ \qquad = \exp\,[-2\pi j\, f_o\, t_o] \int X(f).\, W(f_o-f)\, \exp[2\pi\, jft_o]df \end{cases}$$

avec

w (t) : fenêtre temporelle

W (f) : transformée de Fourier de w(t)

En imposant la condition :

$$h\,(t) = w(-t) \tag{3}$$

on voit que les deux équations deviennent identiques à l'exception du facteur de phase :

$$s_F\,(t_o,f_o) = \exp\,[2\pi j\, f_o t_o] \,.\, S_T\,(t_o,f_o) \tag{4}$$

et les deux méthodes donnent bien le même spectre de puissance :

$$|s_F\,(t_o,f_o)|^2 = |S_T(t_o,f_o)|^2 \tag{5}$$

Ainsi, il suffit de traiter l'une des méthodes.

On peut éventuellement déduire les résultats de l'autr simplement en tenant compte des relations (3) et (4). Nous traitons ici uniquement la méthode de la fenêtre fréquentielle, et désormais nous notons $s_F(t_o,f_o)$ de l'équation (1) simplement comme $s(t_o,f_o)$.

Cette méthode très stable, ne donne pas la distributio d'énergie du signal avec une grande précision. Cette propriété peut être clairement comprise, en utilisant le concept de la distri bution d'énergie complexe définie par Rihaczek (1968) et développée par Ackroyd (1971). La puissance de signal filtré peut s'écrire :

$$|s(t_o,f_o)|^2 = s(t_o,f_o)\,.\,s^{*}(t_o,f_o)$$

$$= \int x(t).h(t_o-t).\exp\,[-2\pi j\, f_o(t-t_o)]\,dt \;.$$
$$\int X^{*}(f).H^{*}(f-f_o)\,\exp\,[-2\pi j\, f\, t_o]\,df$$

c'est-à-dire :

$$(6)\qquad |s(t_o,f_o)|^2 = \iint \varepsilon_x\,(t,f).\varepsilon_h(t_o-t,f-f_o)\,dt\,df \geq o$$

avec

$$(6')\qquad \begin{cases} \varepsilon_x(t,f) = x(t).X^{*}(f).\exp\,[-2\pi j\, f\, t] \\ \varepsilon_h(t,f) = h(t).H^{*}(f).\exp\,[-2\pi j\, f\, t] \end{cases}$$

Dans l'équation (6), les intégrations doivent être effectuées sur tout le domaine de temps et de fréquence, mais la contribution vient, en réalité, du domaine restreint $\Delta T$, $\Delta F$ autour du point $t_o, f_o$, qui correspond à la réponse du filtre en temps et en fréquence. Par suite de ces intégrations, l'"énergie "intrinsèque du signal, $\varepsilon_x$ est en quelque sorte lissée par la réponse du filtre $\varepsilon_h$. C'est la raison pour laquelle cette méthode est très stable, mais ne donne pas de distribution très "piquée" dans le plan temps-fréquence. Cependant, cette méthode a été largement utilisée dans l'analyse des signaux naturels magnétosphériques UBF (voir Mc Pherron et al. 1972 ; Gokhberg et al.,1974, par exemple).

1.2.2. METHODE MODIFIEE (MMWM)

L'équation (6) montre que la puissance du signal filtré est obtenue par l'intégration de la densité d'énergie du signal $\varepsilon_x$, pondérée par la réponse du filtre $\varepsilon_h$. Nous ne savons donc pas quelle partie de cette fonction pondérée contribue le plus à l'intégration. Le but de la modification de la méthode est de définir un point dans le plan t-f au voisinage de $t_o, f_o$, autour duquel la contribution aux intégrations est maximale et de déplace les valeurs $|s(t_o,f_o)|^2$, à ce point ⁂.Pour une raison qui sera justifiée plus loin, nous allons appeler les coordonnées de ce poi $\hat{t}_g$ et $\hat{f}_i$.

Noter que la puissance du signal, $|s(t_o,f_o)|^2$, est une quantité réelle et positive. Donc dans l'équation (6), la partie imaginaire ne contribue pas aux intégrations.

$$(7) \qquad \text{Im} \iint [\varepsilon_x(t,f).\varepsilon_h(t_o-t,f-f_o)]\, dt\, df = 0$$

Il nous suffit donc de considérer la partie réelle de l'expression.

Nous allons commencer à calculer l'ordonnée $\hat{f}_i$. Dans ce but nous intégrons la distribution pondérée dans le domaine temps

$$(8) \qquad \eta(f\ ;\ t_o,f_o) = \int \text{Re}\,[\varepsilon_x(t,f).\varepsilon_h(t_o-t,f-f_o)]\, dt$$

Si dans le domaine défini approximativement par $f_o - \Delta F/2$, $f_o + \Delta F/2$, la fonction $\eta(f)$ est très piquée autour d'ur

⁂ En fait nous verrons qu'on ne choisit pas pour coordonnées les points qui correspondent à la valeur maximale, mais ceux qui correspondent au centre de gravité de la fonction de distribution de l'énergie pondérée.

valeur spécifique de la fréquence, cette valeur donnera la meilleure représentation de la fréquence à laquelle la fréquence maximale se situe. Un moyen approximatif de trouver cette valeur est de prendre un moment premier normalisé de la distribution $\eta$ (f), c'est-à-dire, de calculer la position du centre de gravité *.

Donc nous définissons :

$$(9) \qquad \hat{f}_i\ (t_o,f_o) = \frac{\int f \cdot \eta\ (f\ ;\ t_o,f_o)\ df}{\int \eta\ (f\ ;\ t_o,f_o)\ df}$$

De même, nous définissons :

$$(10) \qquad \xi\ (t\ ;\ t_o,\ f_o) = \mathrm{Re}\ [\varepsilon_x\ (t,f) \cdot \varepsilon_h(t_o-t,f-f_o)]\ df$$

$$(11) \qquad \hat{t}_g\ (t_o,f_o) = \frac{\int t \cdot \xi(t\ ;\ t_o,f_o)\ dt}{\int \xi\ \ (t\ ;\ t_o,f_o)\ dt}$$

Le point de coordonnées $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$ peut être considéré comme le centre de gravité de la distribution d'énergie du signal dans le domaine où la réponse du filtre n'est pas nulle. Il est plus significatif d'attacher la densité de puissance $|\ s(t_o,f_o)|^2$ au point $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$ qu'au point $t_o,f_o$ (Figure 1).

Si un signal filtré est exprimé avec son module et son argument :

$$(12) \qquad s(t_o,f_o) = A(t_o,f_o)\ \exp\ [j\ \Phi\ (t_o,f_o)]$$

* L'avantage de cette méthode est de ne pas nécessiter la connaissance exacte de la fonction $\eta$ , qui, par ailleurs, peut présenter plusieurs maximas mais n'a qu'un seul moment, très représentatif.

On peut montrer (voir Appendice 1) que

$$(13)\quad \begin{cases} \hat{t}_g\,(t_o,f_o) = t_o - \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial\,\phi(t_o,f_o)}{\partial\,f_o} \\ \hat{f}_i\,(t_o,f_o) = \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial\,\phi\,(t_o,f_o)}{\partial\,t_o} \end{cases}$$

$\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$ sont calculés très facilement par la dérivation partielle de la phase du signal filtré. Or l'information de phase est toujours disponible pendant le calcul de $s(t_o,f_o)$, mais est en général négligée.

Nous notons aussi sur l'équation (13) que les coordonnées $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$ sont liées à la stationnarité de la phase, ce qui explique une certaine similitude des résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes (voir Appendice 2). Nous verrons également que $\hat{t}_g$ et $\hat{f}_i$ peuvent être considérés comme le temps de groupe et la fréquence instantanée du signal limité au domaine $\Delta T$, $\Delta F$ où la réponse du filtre n'est pas nulle.

1.2.3. DISTRIBUTION DE DENSITE D'ENERGIE

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes contentés de définir le déplacement de la distribution de puissance obtenue par la méthode MWM. Pour que notre calcul soit significatif, il convient de définir, dans le cadre de la méthode MMWM une nouvelle densité d'énergie.

Commençons d'abord par regarder le problème de la distribution d'énergie instantanée d'un point de vue pratique.

Il existe plusieurs définitions du spectre instantané ou de la densité d'énergie dans le plan temps-fréquence selon les auteurs (Ville (1948) ; Page (1952) ; Rihaczek (1968).) Toutes ces définitions butent sur un obstacle à savoir que la densité d'énergie n'est pas toujours réelle positive. (voir par exemple Blanc-Lapierre et Picinbono, 1955 ; Escudié 1972) ; C'est parce que ces auteurs imposent que la densité $\varepsilon$ vérifie les conditions suivantes :

$$(14)\begin{cases} \iint \varepsilon(t,f)\, dt\, df = \int |X(f)|^2\, df = \int |x(t)|^2\, dt & \text{Condition I} \\ \int \varepsilon(t,f)\, dt = |X(f)|^2 & \text{Condition II} \\ \int \varepsilon(t,f)\, df = |x(t)|^2 & \text{Condition III} \end{cases}$$

Or nous pensons que dans le cas pratique les conditions II ou III ne sont pas nécessaires. Par exemple, quand on considère

un signal composé de deux signaux tel que :

$$x(t) = A_1(t) \exp [2 \pi j f_1 t] + A_2(t) \exp[2 \pi j f_2 t]$$

la puissance de signal $|x(t)|^2$ peut devenir nulle à chaque battement des deux signaux et cependant l'"énergie" de chacun des signaux est toujours présente. Donc nous n'avons pas intérêt à considérer la puissance instantanée de $|x(t)|^2$, mais plutôt les puissances individuelles, $|A_1(t)|^2$ et $|A_2(t)|^2$ . Donc nous nous imposons, pour définir la distribution d'énergie pour MMWM la condition I seulement.

Commençons maintenant par définir une densité d'énergie pour la méthode de la fênêtre glissante (MWM), en respectant la condition I de l'équation (14).
Considérons un signal d'énergie finie, qui a l'énergie totale $E_o$ telle que :

$$(15) \qquad E_o = \int x(t).x^*(t) \; dt = \int X(f).\, X^*(f) \; df$$

Cette énergie totale est exprimée avec la notation de densité d'énergie complexe de Rihaczek.*

$$(16) \qquad E_o = \iint \varepsilon_x(t,f) \; dt \; df = \iint x(t).X^*(f) \exp(-2 \pi j f t) \; dt \; df$$

---

* Nous avons pris la définition de densité d'énergie donnée par Rihaczek, 1968, uniquement comme base de départ théorique. Il nous semble, en effet, que cette définition contient plus de réalité physique qu'aucune autre définition.

Néanmoins cette densité d'énergie est une quantité complexe et même si l'on prend la partie réelle de cette distribution elle peut être négative aussi bien que positive. L'auteur avait donc proposé d'en effectuer une intégration dans une cellule $T_r \times B_d$ ($T_r$ : temps de relaxation, $B_d$ : largeur de la bande dynamique de signal) ayant une surface unité ($T_r \cdot B_d = 1$). Or par cette intégration on perd la qualité d'instantanéité. En effet, nous avons vu dans l'équation (6) que le filtrage correspondait à la convolution de $\varepsilon_x$ avec la réponse du filtre $\varepsilon_h$, ce qui revient plus ou moins à l'intégration de $\varepsilon_x$ dans le domaine $\Delta T . \Delta F \sim 1$.

---

La quantité qu'on obtient par MWM est une puissance instantanée du signal filtré. Donc pour définir une distribution d'énergie pour MWM, $\bar{\varepsilon}$, il faut normaliser le signal filtré par la réponse du filtre utilisé, G.

$$(17) \quad \begin{cases} G = \iint \varepsilon_h(t,f)\, dt\, df \\ \quad = \int H(f).H(f)^{*} df \end{cases}$$

Alors la densité d'énergie, $\bar{\varepsilon}$, est définie avec l'équation (6), comme

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}\,(t_o,f_o) = \dfrac{1}{G} \; |s(t_o,f_o)|^2 \\ \qquad\qquad = \dfrac{\iint \varepsilon_x(t,f) \cdot \varepsilon_h(t_o-t, f_o-f)\, dt\, df}{\iint \varepsilon_h(t,f)\, dt\, df} \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que par l'intégration de $\bar{\varepsilon}$ dans le plan $t_o - f_o$ nous retrouvons l'énergie totale $E_o$.

$$\iint \bar{\varepsilon}\ (t_o, f_o)\ dt_o\ df_o = \iint \varepsilon_x\ (t,f)\ dt\ df \tag{19}$$

D'autre part comme G , $|S(t_o,f_o)|^2 \geq 0$, $\bar{\varepsilon}$ est une quantité réelle et positive, ce qui est très maniable dans la pratique.

Maintenant définissons la densité d'énergie, $\bar{\varepsilon}$, de MMWM, en utilisant la densité d'énergie $\bar{\varepsilon}$ de MWM définie par l'équation (18). Nous avons décrit dans le chapitre précédent la modification de la distribution d'énergie. Donc pour définir $\hat{\varepsilon}$ de MMW, il faut tenir compte de cette modification de géométrie Nous définissons donc la densité d'énergie $\hat{\varepsilon}$, pour que l'énergie totale du signal soit conservée.

Nous définissons $\hat{\varepsilon}$ tel que :

$$\hat{\varepsilon}\ (\hat{t}_g, \hat{f}_i) = \frac{1}{|J|}\ \bar{\varepsilon}\ (t_o, f_o) \tag{20}$$

$$\text{avec } J = \frac{\partial \hat{t}g}{\partial t_o} \cdot \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial f_o} - \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial t_o} \cdot \frac{\partial \hat{t}_g}{\partial f_o}$$

On peut vérifier facilement que l'énergie totale est conservée :

$$\iint \hat{\varepsilon}\ (\hat{t}_g, \hat{f}_i)\ d\hat{t}_g\ d\hat{f}_i = \iint_{E_o} \bar{\varepsilon}\ (t_o, f_o)\ dt_o\ df_o \tag{21}$$

Mais cette définition n'est pas convenable pour le calcul numérique, nous écrivons donc $\hat{\varepsilon}$ de l'équation (20) sous une autre forme équivalente :

$$(22)\quad \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) = \iint \delta(\hat{t}_g-\hat{t}_{g_o})\,\delta(\hat{f}_i-\hat{f}_{i_o})\,\hat{\varepsilon}(\hat{t}_{g_o},\hat{f}_{i_o})\,d\hat{t}_g,d\hat{f}_i$$

$$= \iint \delta(\hat{t}_g-\hat{t}_{g_o})\,\delta(\hat{f}_i-\hat{f}_{i_o})\,\bar{\varepsilon}(t_o,f_o)\,dt_o\,df_o$$

$\hat{t}_{g_o},\hat{f}_{i_o}$ étant le temps de groupe et la fréquence instantanée associés au point $t_o,f_o$ : $\hat{t}_{g_o}(t_o,f_o)$, $\hat{f}_{i_o}(t_o,f_o)$.

L'équation (22) s'écrit encore comme :

$$(23)\quad \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) =$$

$$\lim_{\substack{\delta t \to 0\\ \delta f \to 0}} \frac{1}{\delta t\,.\delta f} \iint \Pi_{\delta t}(\hat{t}_g-\hat{t}_{g_o}(t_o,f_o))\,.\,\Pi_{\delta f}(\hat{f}_i-\hat{f}_{i_o}(t_o,f_o))\,\bar{\varepsilon}(t_o,f_o)\,dt_o\,df_o$$

$\Pi_{\delta x}(x)$ représentant la fonction "porte" définie par ⁂ :

$$\Pi_{\delta x}(x) = 1 \quad \text{pour } |x| \leq \delta x/2$$

$$= 0 \quad \text{pour } |x| > \delta x/2$$

Etant donné que $\bar{\varepsilon}(t_o,f_o) \geq 0$, on voit que $\hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i)$ est aussi une fonction partout positive ou nulle.

⁂ On a choisi des fonctions "porte" de préférence aux distributions de Dirac, car dans tous les calculs numériques, ce sont elles qu'on utilise en pratique.

1.2.4. INFLUENCE DU FILTRE

Comme nous utilisons le résultat de la méthode de la fenêtre glissante (MWM), nous ne sommes pas libres de l'influence du filtre utilisé. Examinons donc l'influence du filtre en prenant les deux classes de signaux suivantes :

1) Signal ayant une dispersion en fréquence faible par rapport à sa durée

Cette classe de signal sera caractérisée par deux paramètres : la largeur de spectre B* et la durée T du signal, avec :

$$B \cdot T \gg 1$$

D'autre part comme les largeurs de filtre en temps $\Delta T$, et en fréquence, $\Delta F$ sont également liées par la relation

$$\Delta F \cdot \Delta T \geq 1$$

nous serons obligés de distinguer deux cas, selon les valeurs relatives de $\Delta F$ et B ou $\Delta T$ et T

1-a) La largeur du filtre est très petite par rapport à la largeur de spectre du signal.

(24) $\Delta F \ll B$ (ou $\Delta T \ll T$)

* Il est sous-entendu que la largeur du spectre d'un signal réel correspond à la partie positive du spectre. Ceci revient à prendre la largeur du spectre du signal analytique correspondant.

D'après l'équation (1), le signal filtré s'exprime comme

$$(1) \quad s(t_o,f_o) = \int X(f).H(f-f_o).\exp\left|2\pi jft_o\right|df$$

L'intégration est prise sur tout l'axe des fréquences, mais la contribution principale à l'intégration se produit juste au voisinage de la fréquence f où la fonction de transfert du filtre $H(f-f_o)$ n'est pas nulle, ceci permet d'approximer le spectre du signal X(f), par le développement du premier ordre au point $f_o$. D'autre part, nous avons supposé que $\Delta F \ll B$, c'est-à-dire que la variation d'amplitude de X(f) est négligeable. Donc nous pouvons approximer X(f) simplement par le développement de phase autour de $f_o$. Si X(f) est donné par

$$(25) \quad X(f) = A(f)\exp\left|j\,\varphi\,f\right|$$

On peut écrire :

$$X(f) \sim A(f_o)\ \exp\left|2\pi j(a_o + a_1 f)\right|$$

avec

$$(26) \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2\pi}\left.\dfrac{d\,\varphi(f)}{dt}\right|_{fo} \\ a_o = \varphi(t_o) - a_1 f_o \end{cases}$$

Noter que $a_1$ n'est autre que le temps de groupe à la fréquence $f_o$, $t_g(f_o)$, défini suivant les conventions usuelles pour un signal à bande étroite.

Substituons l'équation (25) dans (1), on obtient le signal filtré approché :

$$s(t_o,f_o) = \int A(f_o).\exp\left|2\pi j(a_o+a_1 f)\right|\exp\left|2\pi jft_o\right|df$$

$$= A(f_o)\exp\left|2\pi ja_o\right|.h(t_o+a_1)\exp\left|2\pi f_o(t_o+a_1)\right|$$

avec h(t) transformée de Fourier de H(f)

Si nous prenons la réponse impulsionnelle du filtre h(t) comme réelle, on peut calculer très facilement, en utilisant les définitions de l'équation (13), les grandeurs $\hat{t}_g(t_o,f_o)$ et $\hat{f}_i(t_o,f_o)$ associées au signal filtré $s(t_o,f_o)$ définies par l'équation (27) :

$$(28)\quad \begin{cases} \hat{t}_g(t_o,f_o) = t_o - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\, \mathrm{Arg}\,|s(t_o,f_o)|}{\partial f_o} \\ \hat{f}_i(t_o,f_o) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial \mathrm{Arg}\,|s(t_o,f_o)|}{\partial t_o} \end{cases}$$

et l'on trouve :

$$(29)\quad \begin{cases} \hat{t}_g(t_o,f_o) = -a_1 - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\,\varphi(f)}{\partial t}\Bigg|_{f_o} = t_g(f_o) \\ \hat{f}_i(t_o,f_o) = f_o \end{cases}$$

Autrement dit lorsque la condition $\Delta F \cdot B$ est réalisée, le calcul de MMWM redonne pour $\hat{t}_g$ et $\hat{f}_i$ l'une des lois fréquence-temps possibles pour le signal : celle où le temps de groupe est donné en fonction de la fréquence (voir Appendice 2).

I-b) La largeur du filtre est très grande par rapport à la largeur de spectre du signal.

Cette condition peut être exprimée comme

(30) $\Delta F \cdot B$ (ou $\Delta T \cdot T$)

En procédant de la même manière, mais symétriquement en temps on obtient un résultat similaire (en supposant que H(f) est réel) :

$$\hat{t}_g(t_o, f_o) = t_o$$

(31)

$$\hat{f}_i(t_o, f_o) = f_i(t_o)$$

avec $f_i(t_o)$ fréquence instantanée (au sens usuel) du signal original en temps $t_o$ :

$$f_i(t_o) = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\,x\,(t)}{dt} \right|_{t_o} \tag{32}$$

Dans ce cas la courbe $(\hat{t}_g, \hat{f}_i)$ représente l'autre loi possible (dans le plan temps-fréquence) du signal : celle qui donne la fréquence instantanée en fonction du temps.

Ces résultats montrent que, selon la largeur du filtre d'analyse par rapport à la largeur du spectre d'un signal à produit BT faible, les courbes $(\hat{t}_g, \hat{f}_i)$ obtenues par la méthode MMWM correspondent à l'une ou l'autre des lois temps-fréquence du signal.

Remarquons que nous avons imposé, pour faire ces démonstrations une condition sur le filtre : h(t) et H(f) réels. Si h(t) est réel, H(f) est paire et réciproquement ; autrement dit, le filtre est symétrique. Cette propriété de symétrie des filtres joue un grand rôle dans la détermination du temps d'arrivée de signaux naturels (voir par exemple STOREY et GRIERSON, 1958). Cette condition h(t) et H(f) réels n'est donc pas en général restrictive : elle est nécessaire pour faire une bonne analyse des signaux. Elle est d'ailleurs toujours employée dans la méthode simple MWM.

## II) Signal fortement dispersé en fréquence par rapport à sa durée

(33) Nous caractérisons cette classe de signal par BT >> 1

Le domaine BT de définition du signal ayant dans ce cas une surface plus grande que la surface unité, on peut caractériser localement ces signaux par deux paramètres : la largeur de bande dynamique du signal, $B_d$, et son temps de relaxation, $T_r$. Ces paramètres sont définis avec la dérivée seconde de phase du signal $\ddot{\phi}(t)$ et du spectre $\ddot{\varphi}(f)$, ou avec la dérivée première de la fréquence instantanée et du temps de groupe.

$$(34)\begin{cases} T_r = [2\pi / \ddot{\phi}(t)]^{1/2} = \left| \dfrac{df_i(t)}{dt} \right|^{-1/2} \\ B_d = [2\pi / \ddot{\varphi}(f)]^{1/2} = \left| \dfrac{d\, t_g(f)}{df} \right|^{-1/2} \end{cases}$$

$T_r$ et $B_d$ représentent la durée et la largeur de fréquence sur lesquelles on peut justifier l'approximation par un développement au premier ordre de la phase (Rihaczek, 1968). Les deux paramètres sont liés par la relation d'incertitude :

$$(35) \quad T_r \cdot B_d = 1$$

On notera que $B_d = 1/T_r = (df_i/dt)^{1/2}$ avait déjà été introdu par Storey (1953) comme largeur de bande intrinsèque d'un signal dont la fréquence varie au cours du temps.

Donc dans le cas des signaux à produit BT >>1, on peut utiliser le résultat du calcul précédent, en remplaçant B par $B_d$ et

T par $T_r$.

II - a) Cas $\Delta F < B_d$ (ou $\Delta T > T_r$)

$$(29') \quad \begin{cases} \hat{t}_g(t_o,f_o) = t_g(f_o) \\ \hat{f}_i(t_o,f_o) = f_o \end{cases}$$

II - b) Cas $\Delta F > B_d$ (ou $\Delta T < T_r$)

$$(31') \quad \begin{cases} \hat{t}_g(t_o,f_o) = t_o \\ \hat{f}_i(t_o,f_o) = f_i(t_o) \end{cases}$$

Dans ce cas également, la courbe $(\hat{t}_g,\hat{f}_i)$ correspond à deux lois fréquence-temps différentes selon que $\Delta F$ est supérieur ou inférieur à $B_d$. Mais on montre dans l'appendice 2 que si $BT \gg 1$, les deux lois $f_i(t)$ ou $t_g(f)$ représentent en fait une courbe unique. Dans ce cas les équations (29') et (31') peuvent donc être remplacées par les équations

$$(36) \quad \begin{cases} \hat{t}_g(t_o,f_o) = t_g(f_o) \\ f_i(t_o,f_o) = f_i(t_o) \end{cases}$$

La largeur du filtre d'analyse n'intervient donc plus dans la représentation de cette classe de signaux

### 1.2.5. Exemples analytiques

Nous étudierons les propriétés respectives des deux méthodes d'analyse (fenêtre glissante ordinaire, MWM et fenêtre glissante modifiée, MMWM) sur deux signaux analytiques particuliers :

- signal d'amplitude variable et de fréquence instantanée constante,
- signal d'amplitude constante et de fréquence variant linéairement avec le temps.

Remarquons tout d'abord que chacun de ces deux exemples appartient à une des deux classes définies précédemment. En effet, prenons un signal de forme simple

$$x(t) = A \exp [-\pi(\gamma - jb)t^2] \quad (37)$$

Un tel signal représente de façon assez générale les signaux d'amplitude et de fréquence variables. Le fait que l'on néglige les termes d'ordre zéro et d'ordre 1 en t n'affecte pas de façon essentielle les résultats : En effet, le terme du premier ordre se traduit simplement par une translation de fréquence : en effet, si

$$y(t) = x(t) \exp [2\pi j(a_o + a_1 t)]$$

on a $Y(f) = \exp [2\pi j a_o] \cdot X(f - a_1)$

De même négliger les termes d'ordre zéro ou d'ordre un dans la partie réelle de l'exponentielle revient simplement à changer l'amplitude et le référentiel de temps.

Le spectre du signal x(t) de l'équation (37) est :

$$X(f)=A(\gamma-jb)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\pi\ (\gamma+j\ b)}{\gamma^2+\ b^2}\ f^{\ 2}\right\} \tag{38}$$

Calculons maintenant les paramètres liés à ce signal. Nous définissons la durée T et la largeur du spectre de ce signal avec le point d'atténuation de l'amplitude exp [-π/4] par rapport au maximum.

$$\begin{cases} T = \gamma^{-1/2} \\ B = \left(\dfrac{\gamma}{\gamma^2+b^2}\right)^{-1/2} \end{cases} \tag{39}$$

Donc

$$T\cdot B = \left(1+\frac{b^2}{\gamma^2}\right)^{1/2} \geq 1 \tag{40}$$

La fréquence instantanée, $f_i$, et le temps de groupe, $t_g$, de ce signal sont obtenus facilement avec les équations (37) et (38) comme :

$$f_i(t) = bt$$
$$t_g(f) = \frac{b}{\gamma^2+b^2}\ f \tag{41-1}$$

L'équation (41-2) s'écrit aussi sous la forme

$$f = b(1+\gamma^2/b^2)\ t_g(f) \tag{41-3}$$

On remarque tout de suite que les lois de fréquence instantanée en fonction du temps et de temps de groupe en fonction de la fréquence ne coïncident pas. Néanmoins, lorsque $\gamma^2/b^2 \ll 1$, ces deux lois deviennent identiques. Cette condition s'écrit, en terme de produit BT, comme

$$\gamma^2/b^2 = 1 / [(T\ B)^2 - 1] << 1$$

C'est-à-dire

$$(T\ B)^2 >> 1 \qquad (42)$$

D'autre part, comme B T est toujours > 1, on voit que dès que $b/\gamma$ atteindra une certaine valeur, c'est-à-dire dès qu'il y aura une légère variation de fréquence, on atteindra vite un régime où la condition (42) sera satisfaite. Nous examinerons successivement les deux cas b = o et $\gamma$ = O qui correspondraient respectivement aux cas limites BT $\sim$ 1 et BT >> 1.

Toutefois avant d'étudier ces deux exemples, nous calculons le signal filtré de x(t) de l'équation (37).
D'abord nous définissons le filtre utilisé par

$$(43) \quad \begin{cases} H(f) = (2\ \alpha)^{\frac{1}{4}} \exp [-\pi\alpha f^2] \\ h(t) = (2/\alpha)^{-\frac{1}{4}} \exp [-\pi t^2/\alpha] \end{cases}$$

La définition des largeurs de filtre en temps $\Delta T$ et en fréquence, $\Delta F$, peut être analogue à celle de B et T, c'est-à-dire en tenant compte du point d'atténuation de exp [-$\pi$/4] par rapport au maximum.

$$(44) \quad \begin{cases} \Delta F = \alpha^{-1/2} \\ \Delta T = \alpha^{1/2} \end{cases}$$

ou $\Delta T \ . \ \Delta F = 1$

Ce filtre a un gain unitaire tel que

$$G = \iint \varepsilon_h(t,f)\,dt\,df = \int (2\alpha)^{\frac{1}{2}} \exp [-2\pi\alpha f^2]\,df = 1$$

Le signal filtré, $s(t_o,f_o)$, est donc obtenu avec les équations (38) et (43) comme :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& s(t_o, f_o) = \int X(f) \cdot H(f - f_o)\, df \\
& = A \int (\gamma - jb)^{-1/2} \exp\left[ - \frac{\pi (\gamma + jb)}{\gamma^2 + b^2} f^2 \right] . (2\alpha)^{1/4} \exp[-\pi\alpha (f - f_o)^2] . \\
& \qquad\qquad \exp[2\pi j f t_o]\, df \\
& = C_o . \exp[\psi_R(t_o, f_o)] \cdot \exp[j\psi_I(t_o, f_o)]
\end{aligned}
\right. \tag{45}
$$

ou

$$
\left\{
\begin{aligned}
C_o &= A(2\alpha)^{1/4} \left\{ \frac{1 + \alpha(\gamma + jb)}{(1+\alpha\gamma)^2 + \alpha^2 b^2} \right\}^{1/2} \\
\psi_R &= - \pi \left\{ \frac{[(b^2+\gamma^2)\alpha + \gamma]\, t_o^2 - 2b\alpha t_o f_o + \alpha(1+\alpha\gamma) f_o^2}{(b^2 + \gamma^2)\, \alpha^2 + 2\alpha\gamma + 1} \right\} \\
\psi_I &= \pi \left\{ \frac{bt^2 + 2[(b^2+\gamma^2)\, \alpha^2 + \alpha\gamma]\, t_o\, f_o - b\alpha^2 f_o^2}{(b^2 + \gamma^2)\, \alpha^2 + 2\alpha\gamma + 1} \right\}
\end{aligned}
\right. \tag{46}
$$

1.2.5.1. Signal dispersé linéairement en fréquence ($\gamma = 0$) :

Ce signal correspond au cas BT>>1. Nous obtenons le signal filtré dans ce cas en mettant $\gamma = 0$ dans les équations (45) et (46).

$$(47)\quad s(t_o,f_o) = C_1 . \exp\left\{\frac{-\alpha\pi(bt_o-f_o)^2}{\alpha^2 b^2 + 1}\right\} . \exp\left\{\frac{j\pi(bt_o^2+2\alpha^2b^2f_ot_o-\alpha^2b^2f_o^2)}{\alpha^2b^2+1}\right\}$$

$$\text{avec } C_1 = A\,(2\alpha)^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{1+j\,\alpha b}{1+\alpha^2 b^2}\right\}^{1/2}$$

Dans le cas de la méthode MWM, l'information de phase est négligée et seule la puissance du signal filtré est traitée

$$(48)\quad |s(t_o,f_o)|^2 = |C_1|^2 . \exp\left\{-2\pi\frac{\alpha\,(bt_o-f_o)^2}{\alpha^2 b^2 + 1}\right\}$$

On obtient la loi fréquence - temps au sens usuel par la courbe qui donne le maximum de puissance :

$$f_o = bt_o$$

mais pour que cette courbe soit très nette, il faut que le facteur $\alpha /( \alpha^2 b^2+1)$ dans l'équation (48) soit très grand. Or on remarque que ce facteur est à la fois fonction du paramètre du signal, b, et de celui du filtre, $\alpha$. Nous pouvons donc chercher un paramètre $\alpha$ qui maximise ce facteur pour une valeur donnée du paramètre b. La dérivée de $\alpha /( \alpha^2 \cdot b^2 +1)$ par rapport à $\alpha$ est nulle pour un $\alpha$ tel que :

$$(49)\quad \alpha^2 = \frac{1}{b^2}$$

Cette solution (49) peut être exprimée en termes de largeur de filtre et de vitesse de variation de la fréquence

instantanée. De l'équation (41-1), b s'écrit comme

(50) $\quad b = df_i(t) \,/\, dt$

D'autre part, avec la définition (44) de la largeur du filtre, l'équation (49) devient :

(51) $\quad \Delta F = \left| \dfrac{df_i}{dt} \right|^{1/2}$

Nous retrouvons un résultat identique à celui donné par Storey (1953), à un facteur 4 / $\pi$ près qui provient de la définition différente de $\Delta F$ et $\Delta T$. Mais cette condition d'optimisation du filtre d'analyse est difficile à utiliser sans connaissance a priori de la loi fréquence - temps du signal. De plus, même si le filtre est optimal, le signal filtré a une certaine surface et ne se situe pas sur une courbe représentant la loi fréquence - temps.

Examinons maintenant le cas de MMWM. Nous nous servons du point indiqué par la fréquence instantanée et le temps de groupe du signal filtré, qui sont dans le cas présent (d'après l'équation (47) ) :

(52) $$\begin{cases} \hat{f}_i(t_o,f_o) = \dfrac{b(\alpha^2 b\, f_o + t_o)}{\alpha^2\, b^2 + 1} \\ \hat{t}_g(t_o,f_o) = \dfrac{\alpha^2 b\, f_o + t_o}{\alpha^2 \cdot b^2 + 1} \end{cases}$$

Les $\hat{f}_i$, $\hat{t}_g$ sont influencés par le paramètre de filtre $\alpha$ mais les points $(\hat{t}_g, \hat{f}_i)$ se trouvent sur une courbe

$$\hat{f}_i = b\hat{t}_g$$

qui représente la loi fréquence - temps du signal et cette courbe

n'est pas liée au paramètre de filtre, $\alpha$. Donc nous reconstituons la loi fréquence - temps sans que le choix de la largeur du filtr intervienne.

Néanmoins, examinons l'influence du paramètre $\alpha$ sur $\hat{f}_i$ et sur $\hat{t}_g$. Nous pouvons trouver des approximations de l'équation (52) selon la valeur de $\alpha^2 b^2$ :

i) $\alpha^2 b^2 >> 1$

$$\begin{cases} \hat{f}_i \simeq f_o \\ \hat{t}_g \simeq f_o / b \end{cases} \tag{53}$$

ii) $\alpha^2 b^2 << 1$

$$\begin{cases} \hat{f}_i \simeq bt_o \\ \hat{t}_g \simeq t_o \end{cases} \tag{54}$$

On remarque dans le cas i) que la courbe représente la loi de temps de groupe et que le cas ii) représente la loi de fréquence instantanée. Mais comme dans le cas présent BT >>1, les deux lois sont identiques : $f_o = b\hat{t}_g$, $\hat{f} = bt_o$ (voir également Appendice 2) et la largeur du filtre n'intervient pas.

On peut relier b au temps de relaxation donné par l'équation (34) :

$$T_r = \left| \frac{df_i}{dt} \right|^{-1/2} = | b |^{-1/2} \tag{55}$$

D'autre part $\alpha$ est exprimé par la largeur du filtre, $\alpha = (\Delta T)^2$ , alors $\alpha^2 \cdot b^2$ s'écrit comme

$$\alpha^2 \cdot b^2 = \left[ \frac{\Delta T}{T_r} \right]^4 \tag{56}$$

Le système d'équation (53) est bien équivalent aux équations de (29') établies dans le cas général où $\Delta T >> T_r$.

Il en est de même pour le système (54) et les équations de (31').

Jusqu'à présent, nous n'avons examiné que la "géométrie" de la distribution $\hat{\varepsilon}$, c'est-à-dire la représentation des points dans le plan $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$ où $\hat{\varepsilon}$ n'est pas nulle. Il convient également de s'assurer que la grandeur de $\hat{\varepsilon}$ représente valablement la distribution d'énergie du signal.

Cette méthode est faite de façon générale dans l'appendice 3.de cette partie. Nous y montrons que, le long de la courbe $\hat{f}_i = b\hat{t}_g$, la densité d'énergie est inversement proportionnelle au parcours, par unité de temps, de la fréquence instantanée dans le plan temps fréquence : plus la fréquence varie vite, plus le noircissement sur un sonagramme sera faible, puisque par unité de temps l'énergie contenue dans le signal rest la même, et c'est l'intégration de $\hat{\varepsilon}$ le long du parcours qui doit représenter celle-ci. On trouve (voir équation A-21) :

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}\ (\hat{f}_i, \hat{t}_g) = \dfrac{A^2}{(b^2+1)} & \text{pour } f_i = b\hat{t}_g \\ \hat{\varepsilon}\ (\hat{f}_i, \hat{t}_g) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $b = df_i / dt$

Dans le cas où b tend vers zéro, $\hat{\varepsilon}$ tend vers $A^2$ qui est bien la puissance du signal $|x(t)|^2$.

La distribution $\hat{\varepsilon}$ que nous avons définie est donc très significative dans le cas d'un signal à fréquence variable.

1.5.2.1. Signal d'amplitude variable (b = 0) :

Considérons maintenant un signal dont la fréquence instantanée est constante, mais dont l'enveloppe varie de façon gaussienne (cas BT ∿ 1).

Dans ce cas, on obtient le signal filtré en mettant $\gamma = 0$ dans les équations (45) et (46) :

$$(57)\begin{cases} s(t_o,f_o) = C_2.\exp\left\{\dfrac{-\pi(\alpha f_o^2+\gamma t_o^2)}{\alpha\gamma + 1}\right\}.\ \exp\left\{2\pi j\dfrac{\alpha\gamma\ f_o t_o}{\alpha\gamma + 1}\right\} \\ \text{avec} \\ C_2 = A.\ \dfrac{(2\alpha)^{1/4}}{(\alpha\gamma + 1)^{1/2}} \end{cases}$$

Comme le filtre a un gain unité, la distribution d'énergie de MWM, $\bar{\varepsilon}\ (t_o,f_o)$, est obtenue tout de suite d'après l'équation (57) :

$$(58)\begin{cases} \bar{\varepsilon}\ (t_o,f_o) = |s(t_o,f_o)|^2 \\ \qquad\qquad = |C_2|^2.\exp\left\{\dfrac{-2\pi(\alpha f_o^2+\gamma t_o^2)}{\alpha\ \gamma + 1}\right\} \end{cases}$$

D'autre part la fréquence instantanée, $\hat{f}_i$, et le temps de groupe, $\hat{t}_g$, du signal filtré sont aussi obtenus d'après l'équation (57) :

$$(59)\begin{cases} \hat{f}_i(t_o,f_o) = \dfrac{1}{2\pi}\ \dfrac{\partial\ \text{Arg}\ (s)}{\partial\ t_o} = \dfrac{\alpha\ \gamma}{\alpha\ \gamma+1}\ f_o \\ \hat{t}_g\ (t_o,f_o) = t_o - \dfrac{1}{2\pi}\ \dfrac{\partial\ \text{Arg}\ (s)}{\partial\ f_o} = \dfrac{t_o}{\alpha\ \gamma + 1} \end{cases}$$

que l'on peut écrire

$$(59') \quad \begin{cases} \hat{f}_i(t_o, f_o) = a_1 . f_o \\ \hat{t}_g(t_o, f_o) = a_2 . t_o \end{cases}$$

On voit que $\hat{f}_i$ et $\hat{t}_g$ dépendent de façon indépendante des deux variables $t_o$ et $f_o$ et que - contrairement au cas précédent - il n'y a pas de relation entre $\hat{f}_i$ et $\hat{t}_g$ qui soit indépendante de $t_o$ et $f_o$. Autrement dit, à un domaine dans le plan $t_o, f_o$ correspond un domaine de même dimension dans le plan $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$. Les points de coordonnées $\hat{t}_g$ , $\hat{f}_i$ ne se trouvent pas sur une courbe, mais sur une surface. Calculons la distribution d'énergie $\hat{\varepsilon}_g(\hat{t}_g, \hat{f}_i)$ en nous servant des équations (20), (58), (59) :

$$(60) \quad \begin{cases} \hat{\varepsilon}\,(\hat{t}_g, \hat{f}_i) = \bar{\varepsilon}\,(t_o, f_o) \;/\; |J| \\ \qquad\qquad = C_3 . \exp\left\{ - 2\,\pi\,(\alpha\,\gamma + 1) \left( \dfrac{\hat{f}_i^{\,2} + \gamma\,\hat{t}_g^{\,2}}{\alpha\gamma^2} \right) \right\} \\ \text{avec} \\ \qquad C_3 = \dfrac{(\alpha\gamma+1) \cdot (\,2\alpha\,)^{1/2}}{\alpha\,\gamma} \end{cases}$$

Nous remarquons que la distribution $\hat{\varepsilon}$ est fonction de $\alpha$ et de $\gamma$ , qui sont liés à la largeur du filtre et à celle du spectre du signal. Pour illustrer l'aspect des deux distributions $\bar{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon}$ , considérons 3 cas selon les valeurs du produit $\alpha\,\gamma$ . Dans chacun des cas, les équations (58) et (60) peuvent être approximées de façon différente :

i) $\alpha\gamma \ll 1$ (ou $\alpha\gamma = (B/\Delta F)^2 \ll 1$) :

Alors

$$(61)\quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}(t_o,f_o) \sim |C_2|^2 . \exp[-2\pi\alpha f_o^2] . \exp[-2\pi\gamma\, t_o^2] \\ \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) \sim A.\ \delta(\hat{f}_i) . \exp[-2\pi\gamma\, t_g^2] \end{cases}$$

ii) $\alpha\gamma >> 1$, c'est-à-dire $(B/\Delta F)^2 >> 1$ :

On a

$$(62)\quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}(t_o,f_o) \sim |C_2|^2 \exp[-2\pi\, t_o^2/\alpha] . \exp[-2\pi\, f_o^2/\gamma] \\ \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) \sim A^2/\gamma\ .\delta(\hat{t}_g) . \exp[-2\pi\, \hat{f}_i^2/\gamma] \end{cases}$$

iii) $\alpha\gamma = 1$ C'est-à-dire $(B/\Delta F)^2 \sim 1$

Alors

$$(63)\quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}(t_o,f_o) \sim \dfrac{A^2}{2}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{1/2} . \exp\left\{ -\pi\left(\dfrac{f_o^2}{\gamma} + \gamma\, t_o^2\right)\right\} \\ \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) \sim 2A^2\left(\dfrac{2}{\gamma}\right)^{1/2} . \exp\left\{ -4\pi\left(\dfrac{\hat{f}_i^2}{\gamma} + \gamma\, \hat{t}_g^2\right)\right\} \end{cases}$$

Dans les deux premiers cas, la distribution de $\hat{\varepsilon}$ se trouve sur une droite parallèle à l'axe des temps (cas i) ou à l'axe des fréquences (cas ii) et elle présente soit le spectre de puissance du signal, $|x(t)|^2$, soit le spectre de puissance, $|X(f)|^2$. ( cas $\gamma = 0$ des équations (37 et (38) )

$$(64)\quad \begin{cases} \hat{\varepsilon} \sim \delta(\hat{f}_i) . |x(\hat{t}_g)|^2 \text{ pour } \alpha\gamma << 1 \text{ ou } (B/\Delta F)^2 << 1 \\ \hat{\varepsilon} \sim \delta(\hat{t}_g) . |X(f_i)|^2 \text{ pour } \alpha\gamma >> 1 \text{ ou } (B/\Delta F)^2 >> 1 \end{cases}$$

avec $x(t) = A. \exp [-\pi\gamma t^2]$

$$X(f) = \frac{A}{(\gamma)^{1/2}} . \exp [-\pi f^2 / \gamma]$$

Ce résultat provient du fait que le signal qu'on traite à présent a deux lois fréquence-temps tout à fait différentes : la fréquence instantanée est parallèle à l'axe des temps (puisque la fréquence instantanée est constante $f_i=0$, et la loi du temps de groupe est parallèle à l'axe des fréquences (puisque tout le signal est en fait localisé autour du temps $t_g = 0$).

D'ailleurs on vérifie sur cet exemple les équations 28', 29 et 31,32 qui donnent les différentes lois que l'on obtient dans le plan temps-fréquence en fonction du rapport $B/\Delta F$.

Le troisième cas $\alpha\gamma = 1$ correspond au cas où la largeur du filtre et la largeur du spectre sont équivalentes. Dans ces conditions, la distribution $\hat{\varepsilon}$ est intermédiaire entre celle du cas i et du cas ii, c'est-à-dire que la distribution d'énergie varie selon les deux directions $\hat{t}_g = 0$ et $\hat{f}_i=0$ .

On a représenté sur la figure 2 les courbes de niveau ( $\sim$à mi-hauteur du maximum en puissance)* des densités d'énergie $\bar{\varepsilon}$ $(t_o,f_o)$ et $\hat{\varepsilon}$ $(\hat{t}_g,\hat{f}_i)$. On remarque que la méthode MMWM donne des localisations en énergie bien plus concentrées que la méthode

* Enfin nous avons pris non pas 0.5 mais exp $[-\pi/4]$, en sorte que BT soit égal à 1(B et T sont les largeurs en amplitude). Sur la figure sont présentées les largeurs $B_p$ et $T_p$ en puissance, pour lesquelles le spectre de puissance et la puissance instantanée de signal atteignent la valeur exp$(-\pi/4)$ de leur maximum. On a alors $B_p \cdot T_p = 1/2$.

ordinaire. Par ailleurs, on voit que l'on peut choisir les caractéristiques du filtre en fonction du type de résolution que l'on cherche à obtenir : si l'on veut obtenir une distribution très "piquée" en fréquence, il faut choisir un filtre à bande large (contrairement à ce que notre intuition - qui est en fait fondée sur une connaissance implicite de la méthode ordinaire - nous commanderait) ; si l'on veut obtenir une distribution très piquée en temps, il faut choisir un filtre à bande étroite. Mais quel que soit le filtre utilisé, la localisation de l'énergie reste toujours réduite à un domaine inférieur à celui occupé par le signal.

Enfin, on remarque que même dans le cas où le filtre est le mieux adapté au signal pour la méthode ordinaire ($B/\Delta F \sim 1$), celle-ci permet d'obtenir une surface de l'ordre de $2B_p.T_p$, alors que la méthode modifiée fournit $1/2\ B_p.T_p$ .

1.2.5.3. Interprétation de MWM et MMWM au sens de la modélisation d'un signal

L'idée de développer un signal donné en série discrète de signaux élémentaires gaussiens remonte à GABOR (1946). HELSTORM (1966), puis MONGOMERY (1967) ont développé cette idée en montrant que l'on pouvait obtenir un développement exact du signal sous forme continue :

$$x(t) = \iint C(t',f)\ \Psi(t\ ;\ t',f)\ dt'\ df \qquad (65)$$

Le noyau intégral ou signal élémentaire, peut être défini d'une infinité de façons.

$$\Psi(t\ ;\ t',f) \equiv G(t-t') \exp[2\pi\ j\ f\ (t + \beta\ t')] \qquad (66)$$

avec

$\int |G(t)|^2\ dt = 1$ et $\beta$ : réel quelconque

Les coefficients du développement sont définis par :

$$C(t',f) = \int x(t)\ .\ \Psi^{*}(t\ ;\ t',f)\ dt \qquad (67)$$

et il existe bien entendu une formulation symétrique pour X(f).

Dans ces conditions, on peut interpréter la méthode de la fenêtre glissante - comme le développement du signal en signaux élémentaires dont la forme est déterminée par la

réponse impulsionnelle du filtre et dont le coefficient $\beta = -1$ . On peut écrire le signal élémentaire $\Psi$ sous la forme

(68) $$\Psi(t\ ;\ t',f) = h^{*}(t'-t).\exp[2\pi j\ f(t-t')]$$

avec $\int |\ h(t)\ |^2 \quad dt = 1$

Substituons l'équation (68) dans l'équation (65), on obtient :

(69) $$C(t',f) = \exp[2\pi jft'] \int x(t).h(t'-t).\exp[-2\pi jft] \quad dt$$

On remarque que l'équation (69) est identique à l'équation (1), qui décrit le signal filtré. Donc le signal filtré $s(t_o,f_o)$ peut être considéré comme les coefficients du développement du signal original en signaux élémentaires définis par la réponse impulsionnelle du filtre, h(t).

Dans la méthode ordinaire (MWM), c'est le carré du module $|s(t_o,f_o)|^2$, qui est présenté, ceci revient à la représentation du carré du module des coefficients $|C(t_o,f_o)|^2$. Mais il est évident que la phase de C joue un grand rôle dans la restitution du signal par l'équation (65). Regardons l'influence de la phase de C dans l'équation (65).

Exprimons les coefficients $C(t_o,f_o)$ par leur argument et leur module

(70) $$C(t',f) = A(t',f)\ \exp\ [j\ \varphi(t',f)]$$

Substituons (70) et (68) dans l'équation (65) :

$$(71) \qquad x(t) = \iint A(t',f)\, h^{*}(t'-t)\, \exp\left[ j\ \varphi(t',f) + 2\pi j\,(ft - t'f)\right] dt'\, df$$

Les grandeurs A et h étant réelles (le filtre est supposé symétrique) et sous réserve que leurs variations soient lentes vis-à-vis des variations de phase, la contribution à l'intégrale sera maximale au voisinage de point t', f défini par :

$$(72) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t'} \left[ \varphi(t',f) + 2\pi(ft - t'f) \right] = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial f} \left[ \varphi(t',f) + 2\pi(ft - t'f) \right] = 0 \end{cases}$$

(Principe de la phase stationnaire). Le système d'équations (72) peut s'écrire :

$$(73) \begin{cases} f = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial \varphi(t',f)}{\partial t'} \\ t = t' - \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial \varphi(t',f)}{\partial f} \end{cases}$$

On voit que ce système d'équations est identique au système (13) qui définit les coordonnées $\hat{f}_i$ et $\hat{t}_g$ à partir de la phase de signal filtré $s(t_o,f_o)$. En d'autres termes, dans la mesure où le principe de la phase stationnaire peut s'appliquer, la méthode MMWM est celle qui permet la reconstitution du signal sous forme continue de signaux élémentaires du type (68).

On comprend pourquoi cette méthode donne des résultats particulièrement remarquables dans le cas des signaux à ampli-

tude lentement variable (paragraphe 1.2.5.1.) : grâce à la propriété pour l'énergie (c'est-à-dire le module des coefficients $C(t_o,f_o)$) de se trouver concentrée sur une courbe $(\hat{f}_i, \hat{t}_g)$, on a une représentation visuelle immédiate et quasi-parfaite du signal.

1.3.1. Méthode pratique de calcul

Le principe de l'application numérique de la méthode MMWM est représenté sur la figure 3. L'organigramme peut être divisé en deux parties. La première correspond à la méthode de la fenêtre glissante ordinaire :

- application d'une transformée de Fourier rapide (FFT) sur le signal à analyser.
- application de la fonction de transfert du filtre
- FFT inverse et calcul de la puissance et de la phase

Dans la seconde partie, nous poursuivons une étape supplémentaire :

Nous utilisons l'information de phase obtenue pendant la première partie ; nous calculons les différences partielles de phase $\Delta\Phi / \Delta t$ et $\Delta\Phi / \Delta f$, et nous distribuons les densités d'énergie obtenues avec MWM aux points $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$. Enfin, pour une représentation continue à l'aide de carrés élémentaires qui peuvent être plus grands que les carrés d'analyse, nous effectuons une sommation.

Le seul problème lié au calcul numérique de la méthode MMWM est que la distribution de $\bar{\varepsilon}$ $(t_o, f_o)$ calculée dans la première étape est discrète : cette distribution est seulement définie sur une grille incrémentale de temps et de fréquence utilisée pour le glissement du filtre utilisé dans la méthode MWM (voir figure 4 a).

Par ailleurs, $\hat{t}_g$ et $\hat{f}_i$ calculés au temps $t_o = N \cdot DT$ et à la fréquence $f_o = M \cdot DF$ ne sont pas forcément des multiples de DT et DF. Ceci est intéressant dans la mesure où l'on peut avoir une meilleure précision que l'intervalle entre deux fréquences

et deux temps centraux du filtre DF, DT. On peut donc définir $\hat{t}_g$ et $\hat{f}_i$ sur une grille plus petite que DF, DT, soit $\delta F$, $\delta T$ (voir figure 4 b). D'autre part, il nous faut calculer la distribution $\bar{\varepsilon}\ (\hat{t}_g, \hat{f}_i)$ d'après la distribution $\bar{\varepsilon}\ (N.DT, M.DF)$ discrète. Donc nous utilisons l'équation (23) sans passer à la limite :

$$(23')\quad \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) = \frac{1}{(\ell.\delta t)\ (k.\delta f)} \iint \prod_{\ell\cdot\delta t}\{tg - tg_o(t_o,f_o)\}\cdot \prod_{k\cdot\delta f}\{f_i - f_{io}(t_o,f_o)\}\ \bar{\varepsilon}(t_o,f_o)\,dt_o\,df_o$$

$$\text{avec}\begin{cases}(t_o,f_o) = (M.DT), N\cdot DF)\\ (t_g,f_i) = (m\delta t,\quad n\delta F)\end{cases}$$

$\hat{E}$ défini par l'équation (23') est une distribution moyennée sur une cellule de surface $(\ell \cdot \delta t)$ x $(k \cdot \delta f)$. Cette intégration est inévitable parce que la distribution de $\bar{\varepsilon}\ (t_o,f_o)$ est discrète. Si l'on augmente la taille de la cellule, on peut avoir moins de fluctuations d'amplitude causées par la distribution discrète de $\bar{\varepsilon}$ , mais on perd en précision par suite du lissage résultant.

Pour que la distribution $\hat{\varepsilon}$ soit significative, l'intégration dans la cellule $(\ell\cdot\delta t)\times(k\cdot\delta f)$ dans le plan $\hat{t}_g$, $\hat{f}_i$ doit correspondre au domaine d'intégration dans le plan $t_o, f_o$ qui contient suffisamment de points $\bar{\varepsilon}\ (t_o,f_o)$ calculés (voir figure 4 C). Dans le cas où l'on pense que le signal est concentré sur une courbe, on pourrait diminuer ce domaine d'intégration pour obtenir une meilleure résolution.

Comme nous sommes plutôt intéressés par la précision sur la détermination en fréquence, nous avons choisi pour tous les exemples numériques la relation suivante :

$$\begin{cases} \delta t = DT \\ \delta f = DF / 2 \end{cases}$$

et la cellule d'intégration est $\delta t \times \delta f$, ceci permet d'avoir une meilleure précision en fréquence que l'intervalle incrémental de la fréquence du filtre DF.

Pour éliminer les points non significatifs de $\hat{t}_g, \hat{f}_i$, (qui proviennent d'erreurs de calcul liées au fait que la largeur du filtre ne peut pas être strictement nulle en dehors de l'intervalle $\Delta T, \Delta F$),nous avons inclus dans le programme un critère de rejet :

$$(70) \quad \begin{cases} | \hat{f}_i - f_o | \ / \ (\Delta F/2) > A_1 \\ | \hat{t}_g - t_o | \ / \ (\Delta T/2) > A_2 \end{cases}$$

Si la différence entre la fréquence ou le temps central du filtre et la fréquence instantanée ou le temps de groupe est grande par rapport aux réponses en fréquence et en temps du filtre, ( $\Delta F$ ou $\Delta T$), nous éliminons ces points. Pour tous les exemples présentés, nous avons choisi $A_1 = A_2 = 1.6$ c'est-à-dire que nous tenons compte uniquement des points $(t_g, f_i)$ qui se trouvent dans la cellule $(1,6\Delta T) \times (1,6 \Delta F)$ autour de $(t_o, f_o)$.

1.3.2. Exemple de signaux artificiels

1.3.2.1. Restitution d'une loi fréquence-temps donnée à priori.

Sur la figure 5, nous donnons un exemple de l'analyse d'un modèle simple de signal de fréquence variable. La figure du haut présente la loi fréquence instantanée du signal original. La figure du milieu représente le résultat de l'analyse obtenue par la première méthode (MWM) et la figure du bas le résultat obtenu par la deuxième méthode (MMWM). Les caractéristiques du filtre utilisé sont représentées sur la figure du haut. Les largeurs à mi-hauteur choisies sont approximativement

$$\begin{cases} \Delta T \sim 14 \text{ s.} \\ \Delta F \sim 0{,}08 \text{ } H_z \end{cases}$$

Les autres paramètres ont les valeurs suivantes :

- fréquence d'échantillonnage : $f_e = 5$ $H_z$.
- durée totale du signal analysé : $T_o = 13{,}6$ mn, ce qui correspond à un nombre total de points de l'échantillon de N = 4 096 (condition imposée par l'usage des FFT).
- intervalle incrémental en fréquence du filtre : DF = 0,0 Hz.
- intervalle incrémental en temps du filtre : DT = 6,4 s
- intervalle de la grille de représentation finale : $\delta t$ = 6.4s $\delta f$ = 0,01 Hz

Ces données sont identiques pour tous les exemples des figures 5 à 8.

Nous voyons clairement sur la figure 5 l'influence de la largeur de filtre dans le cas de la première méthode. L'épaisseur (dans le sens vertical) du noircissement dépend de la vitesse de variation de fréquence instantanée du signal, la largeur du filtre étant fixe. En utilisant l'information de phase (deuxième méthode), nous obtenons une meilleure résolution indépendante de la vitesse de variation de la fréquence instantanée et la distribution d'énergie se trouve pratiquement sur une courbe identique à la courbe fréquence-temps du signal original.

1.3.2.2. Addition de bruit blanc au signal.

Nous avons utilisé le même signal que dans l'exemple précédent, auquel nous avons ajouté un bruit blanc (figure 6). Le rapport signal sur bruit intégré dans une bande correspondant à la largeur du filtre est ≃ 12 dB. Le rapport signal à bruit total (dans la bande O, $f_e/2$) est ∿ - 3dB .

La distribution aléatoire d'énergie causée par le bruit apparaît nettement sur la figure. Mais nous pouvons, avec la deuxième méthode restituer encore très fidèlement la loi fréquence - temps originale.

1.3.2.3. Résolution en fréquence

- La figure 7 est donnée pour montrer les propriétés de résolution en fréquence des deux méthodes. Les deux signaux ont la même amplitude mais la différence de fréquence augmente avec le temps.

Si nous donnons au terme "résolution" le sens de "précision", la seconde méthode est plus indépendante de la largeur du filtre utilisé, (tout en conservant une bonne précision en temps). De toute façon dans le cas de la première méthode le maximum de précision que l'on peut avoir est la différence entre la fréquence centrale de deux filtres voisins, DF. Il est bien évident qu'on ne peut pas obtenir une fréquence sur laquelle le filtre n'est jamais centré. (Les fréquences centrales des filtres utilisés sont désignées par des barres à droite de la figure).

Mais dans le cas de la deuxième méthode, il est encore possible de déterminer une fréquence entre les deux fréquences centrales du filtre dans le cas où il y a une concentration d'énergie sur une fréquence spécifique ( $\hat{f}_i$ peut prendre n'importe quelle valeur à l'intérieur de l'intervalle $f_o - DF/2$, $f_o + DF/2$ ). La "résolution" — dans le sens de précision — dépend pratiquement du choix de $\delta f$ et peut être rendue aussi fine que désirée.

Si nous donnons au terme "résolution" le sens de "pouvoir séparateur" de deux signaux , les deux méthodes obéissent à la loi d'incertitude : nous ne pouvons clairement séparer deux signaux dont la différence de fréquence est inférieure à la largeur du filtre. (Le phénomène de battement au début de l'enregistrement est d'ailleurs visible dans les deux cas). Néanmoins, en utilisant la capacité d'intégration de l'oeil, il est clair que les deux signaux sont séparés bien plus tôt avec la deuxième méthode qu'avec la première.

La figure 8 représente un cas similaire dans lequel on a réduit l'amplitude de l'un des deux signaux par rapport à l'autre d'un facteur 10. Avec la première méthode le signal le plus faible est, au début, complètement noyé dans le signal le plus fort, alors qu'il apparaît très nettement avec la seconde méthode. Les battements ont bien entendu complètement disparu (compte tenu de l'échelle limitée de résolution en niveaux de grisé).

1.3.2.4. Signaux multiples à modulation de fréquence :

Récemment Griffiths (1975) a proposé une nouvelle méthode pour l'extraction des fréquences instantanées d'un signal à composantes multiples. Cette méthode est fondée sur l'utilisation d'un filtre de prédiction linéaire adaptatif. Pour comparer l'efficacité de notre méthode par rapport à la sienne, nous avons utilisé le même signal que lui (voir sa figure 14). Ce signal est constitué de trois signaux quasi-sinusoïdaux de même amplitude et de fréquences différentes variant lentement avec le temps. Comme nous voyons sur la figure 9 , les lois fréquence-temps de ces trois signauxsont bien reconstitués avec la seocnde méthode, excepté au voisinage de l'un des points d'intersection. La différence que nous trouvons entre les deux points d'intersection provient de la différence entre les phases relatives des deux signaux au voisinage de chacun de ces points. Au voisinage du premier point d'intersection, les deux signaux ont des phases opposées, ils s'annulent l'un l'autre, en conséquence il n'existe plus d'énergie. Pour la deuxième intersection, les deux signaux sont en phase, leurs énergies sont additionnées et la reconstitution de la loi temps- fréquence est meilleure.

Noter que la méthode de Griffiths ne prend pas l'énergie du signal en considération ; elle est éliminée de son algorithme. Il peut donc suivre les deux signaux jusqu'à leur point d'intersection, quelle que soit leur différence de phase. Mais il n'y a pas de signification physique, a postériori, dans une telle représentation, puisqu'il n'y a pas d'énergie qui parvient à

l'observateur.

Notre méthode MMWM donne à la fois la fréquence du signal et sa distribution d'énergie.

### 1.3.3. Exemple de signaux naturels

Nous avons utilisé MMWM pour analyser les pulsation géomagnétiques appelées "perles", enregistrées à l'île de Heard (Océan Indien) et à son point conjugué Dolgochelié (U.R.S.S.) pendant la campagne d'étude des points conjugu de 1971.

Les résultats d'analyse par les deux méthodes avec filtre $F \sim 0{,}026$ Hz, $T \sim 0{,}7$ min, sont présentés sur la figure 10. Nous voyons que avec la deuxième méthode, la st ture discrète du signal est très claire et que la variatio de fréquence peut être mesurée avec une grande précision (permettant ainsi la détermination précise des propriétés dispersives du plasma magnétosphérique dans cette gamme de fréquence).

La figure 11 représente le même résultat d'analyse du même signal reçu au point conjugué, Dolgochelié et à l station voisine de Dolgochelié, Sogra. Nous retrouvons bi une structure très similaire aux deux stations.

## 1.4. INTERETS ET LIMITES DE LA METHODE

D'abord résumons brièvement les propriétés de MMWM.

Pour un signal caractérisé par $BT \gg 1$, cette méthode donne une distribution d'énergie sur une courbe représentant la loi fréquence-temps et la densité d'énergie sur cette courbe est inversement proportionnelle à l'excursion de fréquence instantanée pendant un temps unitaire dans le plan temps-fréquence.

Quand le signal est caractérisé par $BT \simeq 1$, $\hat{\varepsilon}$ est représenté sur une surface autour d'un point où l'on peut considérer que l'énergie est concentrée. Par le choix du filtre, la géométrie de la surface est modifiée et la méthode donne soit la loi fréquence instantanée (en fonction du temps) soit la loi temps de groupe (en fonction de la fréquence) selon la valeur du rapport entre la largeur du filtre utilisé et la largeur du spectre du signal. Dans ce cas, le choix du filtre doit se faire selon le type de loi que l'on cherche à obtenir, et en tenant compte de la durée du signal.

Si l'on compare la méthode MMWM avec la méthode ordinaire de la fenêtre glissante, l'intérêt est évident. On peut avoir une meilleure précision pour la détermination de la loi fréquence temps et, bien que le pouvoir séparateur de deux fréquences obéisse à la relation d'incertitude dans les deux cas l'exemple montre que MMWM a une meilleure résolution visuelle.

Pour le choix du filtre qu'il faut choisir a priori, MMWM a moins de contrainte et donne des résultats équivalents quelle que soit la vitesse de la fréquence. C'est un des sérieux désavantages de la méthode ordinaire que ses résultats dépendent si fortement de cette grandeur que, dans la plupart des cas on ne connaît pas à l'avance. De toute façon nous utilisons le résultat de MWM pour calculer MMWM et nous pouvons toujours sortir le résultat d'analyse de MWM comme résultat intermédiaire. D'autre part (et avantage considérable) le calcul supplémentaire nécessité par MMWM n'est pas très important vis-à-vis du calcul effectué pour obtenir le résultat de MWM (lecture des données, grand nombre de FFT).

La comparaison entre MMWM et la méthode de la fréquence instantanée n'a pas beaucoup de sens au point de vue théorique. En effet, lorsque le filtre utilisé dans MMWM devient plus large que la largeur totale du spectre, ou que la largeur dynamique du signal, MMWM revient à l'analyse de la fréquence instantanée. La plus grande différence se rencontre lorsqu'il existe plusieurs signaux simultanés ou en présence de bruit. La méthode de la fréquence instantanée ne peut plus donner de résultat significatif. Elle n'est applicable qu'à un signal que l'on considère a priori comme centré sur une fréquence unique. (c'est la même raison qui fait qu'on ne se sert pas en général de l'analyse du temps de groupe qui nécessite de supposer que le signal est concentré sur une date !). Mais cet inconvénient existe aussi dans le cas de MMWM : la méthode, même modifiée ne peut pas donner de résultat significatif quand il y a plus d'un signal dans le domaine $\Delta^T$, $\Delta F$ défini par le filtre.

Du point de vue de la séparation de deux signaux distincts, la méthode de Griffiths (ou méthode du filtre linéaire adaptatif) a plus d'avantages. Elle permet de séparer les fréquences instantanées de signaux sans avoir la contrainte de la relation d'incertitude. Mais le plus grand défaut de cette méthode pour l'application directe à l'analyse de signaux naturels est que son algorithme ne tient pas compte de la variation d'amplitude du signal. Un autre avantage de la méthode du filtre linéaire adaptatif est que le calcul peut être effectué presque en temps réel, tandis que MMWM ne peut être appliquée qu'en temps différé. Mais ce désavantage de MMWM est compensé par l'utilisation d'un filtre non causal qui introduit le moins de déformation du signal pour l'estimation du temps d'arrivée ; alors que la méthode du filtre linéaire adaptatif nécessite un certain temps d'adaptation qui introduit des délais par rapport au temps réel d'arrivée du signal, délais qui ne sont pas négligeables.

APPENDICE 1

## RELATION ENTRE PHASE DU SIGNAL FILTRE, FREQUENCE INSTANTANEE ET TEMPS DE GROUPE

Considérons d'abord les moments premiers (complexes), $m_f$ et $m_t$, dont la partie réelle sont $\hat{f}_i$ et $\hat{t}_g$.

$$(A\text{-}1)\begin{cases} m_t(t_o,f_o) = \dfrac{\int t \cdot I\ (t;t_o,f_o)\ dt}{s(t_o,f_o)\ .\ s^{\ddot{}}\ (t_o,f_o)} \\ m_f\ (t_o,f_o) = \dfrac{\int f \cdot J(f;t_o,f_o)\ df}{s(t_o,f_o).s^{\ddot{}}\ (t_o,f_o)} \end{cases}$$

avec

$$(A\text{-}2)\begin{cases} I(t\ ;\ t_o,f_o) = \int \varepsilon_x(t,f)\ .\ \varepsilon_h(t_o-t, f-f_o)\ df \\ J(f\ ;\ t_o,f_o) = \int \varepsilon_x(t,f)\ .\ \varepsilon_h(t_o-t, f-f_o)\ dt \end{cases}$$

En utilisant l'équation (1) et (6') qui définissent les deux expressions de s et celles de $\varepsilon$, on obtient

$$(A\text{-}3)\begin{cases} I(t\ ;\ t_o,f_o) = \exp\ [2\ \pi\ jf_o(t_o-t)]\ \ x\ (t)\ h(t_o-t).s^{\ddot{}}(t_o,f \\ J(f\ ;\ t_o,f_o) = \exp[-2\ \pi\ jf\ t_o]\ \ X^{\ddot{}}(f).\ H^{\ddot{}}\ (f-f_o).s(t_o,f_o \end{cases}$$

Il est facile de montrer que l'intégration de I et J, nécessitée pour l'évaluation de $m_t$ et $m_f$, fait intervenir les dérivées partielles de s et $s^*$ définies par l'équation 1. On obtient aisément

$$(A\text{-}4)\quad \begin{cases} m_t = t_o - \dfrac{1}{2\pi j} \cdot \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{\partial s}{\partial f_o} \\ m_f = -\dfrac{1}{2\pi j} \cdot \dfrac{1}{s^*} \cdot \dfrac{\partial s^*}{\partial t_o} \end{cases}$$

Si s est exprimé par son module et son argument (voir l'équation 15). on obtient

$$(A\text{-}5)\quad \begin{cases} m_t = t_o - \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial f_o} + \dfrac{j}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{A} \cdot \dfrac{\partial A}{\partial f_o} \\ m_f = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial t_o} + \dfrac{j}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{A} \cdot \dfrac{\partial A}{\partial t_o} \end{cases}$$

Nous remarquons que la partie réelle de $m_t$ et de $m_f$ contient seulement la phase du signal complexe filtré, et les équations (13) sont retrouvées :

$$(13)\quad \begin{cases} t_g = R_e\,[m_t] = t_o - \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial \Phi}{\partial f_o} \\ f_i = R_e\,[m_f] = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t_o} \end{cases}$$

Dans la théorie du signal analytique , ces deux quantités sont reliées au temps de groupe et à la fréquence instantanée (VILLE,1948 ; Berthomier, 1975a).

En effet, supposons une onde plane se propageant dans la direction z , la phase complexe au temps $t_o$ et à la position $z_o$ est exprimée par :

(A-6) $$\phi = \omega t_o - k z_o$$

La fréquence instantanée est définie comme ;

(A-7) $$f_i = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t_o}$$

Le temps de groupe $t_g = z_o / v_g$, où $v_g = \partial\omega / \partial k$ est la vitesse de groupe, s'écrit

(A-8) $$t_g = t_o - \left( t_o - \frac{z_o}{v_g} \right) = t_o - \left( t_o - z_o \frac{\partial k}{\partial \omega} \right) = t_o - \frac{\partial \phi}{\partial \omega}$$

donc

$$t_g = t_o - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial f}$$

On voit donc que $\hat{t_g} \equiv t_g$ et $f_i \equiv f_i$. Nous remarquons que notre méthode qui consiste à trouver le point où est concentrée l'énergie n'est qu'une application de ces concepts au signal filtré $s(t_o, f_o)$. Notre méthode aura donc les mêmes défauts que ceux que l'on rencontre dans l'utilisation du signal analytique : elle ne donne pas de résultat significatif s'il existe plus d'un signal dans le domaine $\Delta T$, $\Delta F$ de la réponse du filtre ( $\Delta T \cdot \Delta F \sim 1$)

APPENDICE 2

## LES DIFFERENTES FORMES DE LOIS TEMPS - FREQUENCE

En utilisant la notion de signal analytique introduite par VILLE (1948), le signal peut être exprimé symétriquement dans les deux domaines temps et fréquence comme :

$$(A\text{-}10)\quad \begin{cases} x(t) = A(t).\, e^{j\varphi(t)} & A(t) > 0 \\ X(f) = B(f)\; e^{j\phi(f)} & B(f) > 0 \end{cases}$$

Ces expressions ne sont bien entendu valables que pour les classes de signaux qu'on peut considérer a priori comme centrés autour d'une fréquence et d'une date. Mais les propriétés locales d'un signal peuvent toujours être représentées ainsi.

Cependant, la loi fréquence-temps qui caractérise un tel signal n'est pas unique : il y en a deux en fait. L'une est appelée simplement loi fréquence-temps mais ici nous l'appellerons la loi de fréquence instantanée (sous-entendu fonction de temps) :

$$(A\text{-}11)\quad f_i = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\,\varphi(t)}{dt}$$

Symétriquement, il existe une loi donnant le temps de groupe qui est :

$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\ \phi(f)}{df} \qquad \text{(A-12)}$$

Donc il existe deux lois, fréquence-temps et temps-fréquence, et ces lois ne coïncident pas dans le cas général, même pour les classes de signaux qu'on peut décrire avec l'équation (A-10).

Nous buttons sur un obstacle, puisque nous cherchons une loi, et non pas deux, qui puisse caractériser le signal dans le plan temps-fréquence. Donc il nous faut choisir a priori le type de loi que l'on cherche à obtenir. Nous montrons néanmoins que pour la classe des signaux dits "à grand BT", les deux lois peuvent être considérées comme identiques, ou tout au moins comme localement identiques.

Supposons que la loi de fréquence instantanée d'un signal puisse s'écrire localement, au voisinage du temps $t_o$ comme :

$$f_i = b_1 + b_2\ (t-t_o)$$

$$\text{(A-13)} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\ \varphi(t)}{dt}\Big|_{t_o} = f_i(t_o) \\ b_2 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\Big|_{t_o} = \dfrac{df_i(t)}{dt}\Big|_{t_o} \end{cases}$$

Alors le signal qui donne une telle loi sera exprimé au voisinage du temps $t_o$ comme :

(A-14)

$$x(t\ ;\ t_o) = A(t).\exp\left\{2\pi\ j\left[\ b_o+b_1 t+\frac{b_2}{2}\ (t-t_o)\right]\right\}$$

Son spectre $X(f\ ;\ t_o)$ est :

(A-15)

$$X(f\ ;\ t_o) = \int A(t).\exp\left\{\ 2\pi\ j\left[\ b_o\ +\ b_1 t\ +\ \frac{b_2}{2}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.(t-t_o)^2\quad -\ ft\right]\right\}\quad dt$$

Comme on a supposé qu'il s'agit d'un signal BT>>1, cela revient à dire que la variation d'amplitude du signal est négligeable par rapport à la variation de la fréquence instantanée ou de la phase. Pour les fréquences au voisinage de $f = b_1 = f_i\ (t_o)$, la stationnarité de phase se produit au voisinage de $t = t_o$. Ceci permet d'obtenir une approximation du spectre, ou l'équation A-15, à la fréquence au voisinage de $f = b_1$.

(A-16)

$$X(f\ ;\ t_o,b_1) = \int A(t_o)\exp\left\{\ 2\pi j\left[b_o+b_1 t\ +\ \frac{b_2}{2}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.(t-t_o)^2\ -\ ft\ \right]\right\}\ dt$$

$$= C\cdot\exp\left\{-j\pi\frac{(f-b_1)^2}{b_2}\right\}\ .\ \exp\left\{-2\pi j\ (f-b_1)t_o\right\}$$

Le temps de groupe calculé de ce spectre est :

(A-17)

$$tg(f) = -\ \frac{1}{2\pi}\quad \frac{d\ \mathrm{Arg}\{X\ (f\ ;\ t_o,b_1)\}}{d\ f}$$

$$= \left(\frac{f\ -\ b_1}{b_2}\right) + t_o$$

Cette équation (A-17) s'écrit aussi

(A-18) $$f = b_1 + b_2 (t_g - t_o)$$

qui a la même forme que l'équation (A-13), en changeant $t_g$ par t et $f_i$ par f.

Donc pour la classe de signaux BT >>1, les deux lois sont reversibles, au moins localement

(A-19) $$\begin{cases} f = f_i \{ t_g (f) \} \\ t = t_g \{ f_i (t) \} \end{cases}$$

On peut donc dans ce cas considérer que l'on a une seule loi et l'appeler simplement "la loi fréquence-temps" D'ailleurs Berthomier (1975 ) rapporte que les deux analyses (temps de groupe et fréquence instantanée) qu'il avait effectuées sur un signal géophysique du type "choeur de l'aube" (qui est un signal appartenant à la classe des signaux à grand BT) ont donné des résultats comparables. Du point de vue pratique, nous pourrons donc supposer en général que les deux lois sont identiques, au moins localement, pour les signaux à fréquence variable.

APPENDICE 3.

## DENSITE D'ENERGIE DONNEE PAR LA METHODE MMWM POUR UN SIGNAL DISPERSE LINEAIREMENT

La définition donnée au paragraphe 1.2.3. pour la densité d'énergie $\hat{\varepsilon}$ est :

$$(22)\quad \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i) = \iint \delta\left\{ t_g - t_{g_o}(t_o,f_o)\right\} \delta\left\{ f_i - f_{i_o}(t_o,f_o)\right\} \cdot \bar{\varepsilon}\ (t_o,f_o)\ dt_o\ df_o$$

Les points $\hat{t}_{g_o}, \hat{f}_{i_o}$ définis par les équations (52) sont situés sur une droite $\hat{f}_{i_o} = b\hat{t}_{g_o}$. Donc la distribution d'énergie est toute concentrée sur cette droite. Donc, nous calculons la densité d'énergie sur cette droite. D'autre part, tous les points $t_o, f_o$ qui apportent leur contribution à l'énergie en un point $\hat{t}_{g_o}, \hat{f}_{i_o}$, sur cette droite, sont situés sur une droite d'équation :

$$(A\text{-}20)\quad f_o = \frac{1}{\alpha^2 b}\left[ - t_o + (1 + \alpha^2 b^2)\ \hat{t}_{g_o}\right]$$

Pour simplifier, considérons l'énergie $\hat{\varepsilon}(0.0)$. On ne perd aucune généralité puisque la densité $\hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i)$ est constante sur la droite $\hat{f}_i = b\hat{t}_g$. Pour calculer $\hat{\varepsilon}(0.0)$, il faut donc intégrer $\bar{\varepsilon}\ (t_o,f_o)$ le long de la droite.

$$(A\text{-}20')\qquad f_o = - \frac{t_o}{\alpha^2 b}$$

Pour cela effectuons une rotation des axes telle que le nouvel axe T soit parallèle à la droite définie par l'équation (A-20'), le nouvel axe F lui étant perpendiculaire. L'angle de la rotation $\theta$ est défini par

$$\theta = \text{Arctg}\left(-\frac{1}{\alpha^2 b}\right) \tag{A-21}$$

Les nouvelles variables T et F sont reliées à $t_o$ et par les relations

$$\begin{cases} t_o = T\cos\theta - F\sin\theta \\ f_o = T\sin\theta + F\cos\theta \end{cases} \tag{A-22}$$

Avec ces nouvelles variables, l'intégration est pri le long de l'axe T. D'autre part, nous voulons la densité d'éner sur une courbe $\hat{f}_i = \hat{bt}_g$. Alors la densité d'énergie $\hat{\varepsilon}(0.0)$ sur cette courbe est donnée par :

$$\hat{\varepsilon}(0,0)\Big|_{f_i=bt_g} = \iint \delta(F)\cdot|\cos\varphi|\,.\,\bar{\varepsilon}\,(T,F)\,dT\,dF \tag{A-23}$$

avec $\varphi$ : angle entre l'axe F et la droite $f_i = bt_g$

Comme nous avons choisi un filtre de gain unité, la densité d'énergie $\bar{\varepsilon}\,(t_o,f_o)$ de la méthode ordinaire est simpleme égale au carré du module du signal filtré $|s(t_o,f_o)|^2$ . Celui- s'exprime dans le nouveau système de coordonnées, en appliquant la transformation (A-22) à l'équation (48) :

(A-24) $$\bar{\varepsilon}\ (T,F) = [s(T,F)]^2$$

Donc

$$\hat{\varepsilon}(0,0) = \iint \delta(F).|\cos\varphi|\ .\ [s(T,F)]^2 dT\ dF$$

(A-25) $$= |\cos\ \varphi\ |.\ \frac{\left(A^2\ 1 + \alpha^4 b^2\right)^{1/2}}{\alpha^2\ b^2 + 1}$$

D'autre part $|\cos\varphi|$ est donné par

(A-26) $$\cos\ \varphi = \frac{\alpha^2\ b^2 \quad + 1}{(b^2\ + 1)^{1/2}\ (\alpha^4\ b^2+1)^{1/2}}$$

Donc

(A-27) $$\hat{\varepsilon}(0,0) = \frac{A^2}{\left(b^2 \quad + 1\right)^{1/2}}$$

Rappelons (voir l'équation (50)) que b est défini comme dérivée de la fréquence instantanée : $b = df_i/dt$ avec l'équation (A-27) on peut écrire :

(A-27') $$\begin{cases} \hat{\varepsilon}(\hat{t}_g, \hat{f}_i) = \dfrac{A^2}{\left\{\left(\dfrac{df_i}{dt}\right)^2 + 1\right\}^{1/2}} & \text{pour } \hat{f}_i = b\hat{t}_g \\ = \quad 0 \qquad \text{ailleurs} \end{cases}$$

On remarque que la densité d'énergie est inversement proportionnelle à la distance parcourue par le point $\hat{f}_i, \hat{t}_g$ dans le temps unitaire (voir figure 12 b).

Ce résultat est tout à fait naturel et acceptable. L'énergie totale par unité de temps étant constante, elle se répartit de façon plus ou moins dense sur la courbe de fréquence instantanée selon que la fréquence varie peu ou varie beaucoup dans le même intervalle de temps.

⁂ ⁂

⁂

## REFERENCES DE LA PREMIERE PARTIE

ACKROYD, M.H., Short time spectra and time-frequency energy distribution, J. Acous. Soc. Am., 50, 1229 - 1231,1971

BERTHOMIER,C., Sur une méthode d'analyse de signaux, Ann. Géophys., 31, 239-252,1975

BERTHOMIER, C., et N., CORNILLEAU-WEHRLIN, Application de la notion de signal analytique à la détermination de l'amplitude et de la fréquence instantanée d'un signal Ann. Télecom., 30, 224-230,1975

BLANC LAPIERRE, A. et PICINBONO, B., Remarques sur la notion de spectre instantané de puissance, Alger. Sciences Physiques, 1, N° 1,3-32,1955

DZIEWONSKI, A., S. BLOCH et LANDISMAN, A technique for the analysis of transient seismic signal, Bull. Seism. Soc. Am., 59, 427-444,1969

ESCUDIE, B., Notion de spectre instantané dans l'analyse et la synthèse des signaux, Séminaire du groupe des utilisateurs du traitement du signal C.E.A., G.R.E.T.S.I., Laboratoire d'électronique et de technologie de l'informatique, Grenoble Mai 1970.

GABOR, D., Theory of communication, J. IEE (London) 93, 429-457,1946

GENDRIN, R. Substorm aspects of magnetic pulsations. Space Sci. Rev., 11, 54-130,1970

GOKHBERG, M.V.,O.A., POKHOTELOV, S., PERRAUT,C. DE VILLEDARY, N. WEHRLIN. Analyse détaillée des échanges d'énergie de la polarisation des raies composant la structure fine des Pcl, Ann. Géophys.,30 309-318,1974

GRIFFITHS,L.J., Rapid measurement of digital instantaneous frequency, IEEE Trans. Acoutics, Speech and signal processing, Vol. ASSC-23,207-222, 1975.

HELSTROM,C.W., An expansion of a signal in gaussian elementary signal, I.E.E.E. Trans. on Information Theory, IT-12, 81-82,1966

KODERA,K., C. de VILLEDARY, Numerical analysis of non-stationary signals., Communication présentée à la 18è Assemblée Générale de l'URSI,Lima, Août 1975.

KODERA,K.,C. de VILLERARY, R. GENDRIN, A New method for the numerical analysis of non-stationary signals., Special issue of "physics of the Earth and Planetory Interiors", sous presse 1975.

LACOUME, J.L.,et W. KOFMAN, Description des processus non-stationaires par la représentation temps-fréquence application, colloque National sur le traitement du signal et ses applications, NICE, 1975

Mc PHERRON, R.L., C.T. RUSSELL, et P.J. COLEMAN, Fluctuating magnetic fields in the magnetosphore.2., ULF waves, Space Sci. Rev.,13 , 411-454,1972

MONTGOMERY,L.K., I.S., REED, A generalization of the Gabor Helstrom transform . IEEE Trans. Information Theory. IT-13, 344-345,1967

PAGES, C.H., Instantaneous power spectra,J. Appl. Phys., 25,6,1952

RIGUET,R., Calculateur analogique de l'enveloppe, de la fréquence et de la phase instantanée de signaux naturels. Thèse Uni. Paris VI, 1974.

RIHACZEK,A.W., Signal energy distribution in time and frequency, IEEE Trans. Information Theory, IT-14, 369-374,1968

SMYLIE,D.E, G.K.C., CLARKE, et T.J., ULRYCH. Analysis of irregularities in the earth's rotation. Methods of computational physics 13. chap 11, 1973,Academic Press.

STOREY. L.R.O, An investigation of whistling atmospherics, Phil. Trans. Roy. Soc. A246,113-141, 1953.

STOREY, L.R.O., et J.K., GRIERSON, Time symetric filter (Part 1), Electronic Engng., 586-593, 1958.

STOREY,L.R.O., et J.K., GRIERSON, Time symetric filter (Part 2), Electronic Engng., 648-653,1958

ULRYCH, T.J. et T.N.,BISHOP, Maximum entropy spectra analysis and autoregressive decomposition, Rev. Geophysics and Space physics, 13, 183-200, 1975.

VILLE, J., Theorie et applications de la notion de signal analytique. Câbles et Transmission, 1, 61-74, 1948.

## LEGENDE DES FIGURES

FIGURE 1. Principe de la méthode modifiée de la fenêtre glissante

a) On calcule le premier moment de la distribution d'énergie dans le domaine fréquentiel, $\hat{f}_i$.

b) On calcule le premier moment de la distribution d'énergie dans le domaine temporel, $\hat{t}_g$.

c) L'énergie du signal $s(t_o,f_o)$ est transposée au point $\hat{t}_g,\hat{f}_i$.

FIGURE 2. Répartition de l'énergie obtenue par la méthode ordinaire $\overline{\varepsilon}\ (t_o,f_o)$ et par la méthode modifiée $\hat{\varepsilon}(\hat{t}_g,\hat{f}_i)$ pour un signal BT $\sim$ 1. On a considéré trois cas selon la valeur du rapport de la largeur de bande du signal et de celle du filtre, B/$\Delta$ F.
On a également représenté sur la figure, la puissance (instantanée) du signal et le spectre de la puissance. Les filtres sont présentés en traits pointillés.

FIGURE 3. Organigramme de la méthode modifiée. La première partie est identique à la méthode de la fenêtre glissante ordinaire : on calcule la puissance et la phase du signal filtré pour chaque valeur de la fréquence et du temps. La deuxième partie est propre à la méthode modifiée : on change la distribution de l'énergie en introduisant l'information de phase et en intégrant.

FIGURE 4. Principe du calcul numérique de la distribution d'énergie de la méthode modifiée, $\hat{\varepsilon}$, à partir de celle de la méthode ordinaire $\bar{\varepsilon}$. a) Distribution discrète de $\bar{\varepsilon}$ définie seulement sur la grille formée par les fréquences centrales des filtres en fréquence et en temps. b) Les coordonnées représentées sont les valeurs de $\hat{t}_g$ et $\hat{f}_i$. c) Correspondance du domaine d'intégration dans les deux domaines de coordonnées $(t_o, f_o)$ et $(\hat{t}_g, \hat{f}_i)$.

FIGURE 5. Analyse d'un signal artificiel de fréquence variable. La fréquence d'échantillonnage est 5 Hz et on a analysé 14 minutes de signal. La fréquence de signal varie entre 0,4 et 0,8 Hz. La figure du haut représente la loi fréquence-temps du signal original. Les résultats d'analyse des deux méthodes sont présentées a bas de la figure.

FIGURE 6. Analyse du même signal que celui utilisé dans la figure précédente mais mélangé à du bruit blanc. Le rapport signal sur bruit dans la largeur du filtre est de 12 dB et le rapport des puissances totales est - 3 dB.

FIGURE 7. Evaluation de la résolution des deux méthodes en utilisant deux signaux de même amplitude et dont la différence de fréquence augmente au cours du temps.

FIGURE 8. Même analyse que dans le cas de la figure 7. mais les puissances des deux signaux diffèrent de 20 dB.

FIGURE 9. Analyse par la méthode modifiée de trois signaux mélangés similaires à ceux analysés par Griffiths (1975).

FIGURE 10. Analyse des pulsations géomagnétiques enregistrées à l'île Heard (le temps universel est donné en heure) En haut : première méthode ; en bas : deuxième méthode.

FIGURE 11. Le même signal que dans la figure 10, mais enregistré à Dolgochélié (station géomagnétiquement conjuguée de l'île de Heard) et à la station voisine Sogra est analysé avec la deuxième méthode.

FIGURE 12. La distribution d'énergie $\hat{\varepsilon}$ d'un signal dispersé linéairement

a) Le chemin d'intégration et la rotation des axes.

b) Le parcours de la fréquence instantanée pour un temps unitaire dans le plan temps-fréquence.

:: ::

::

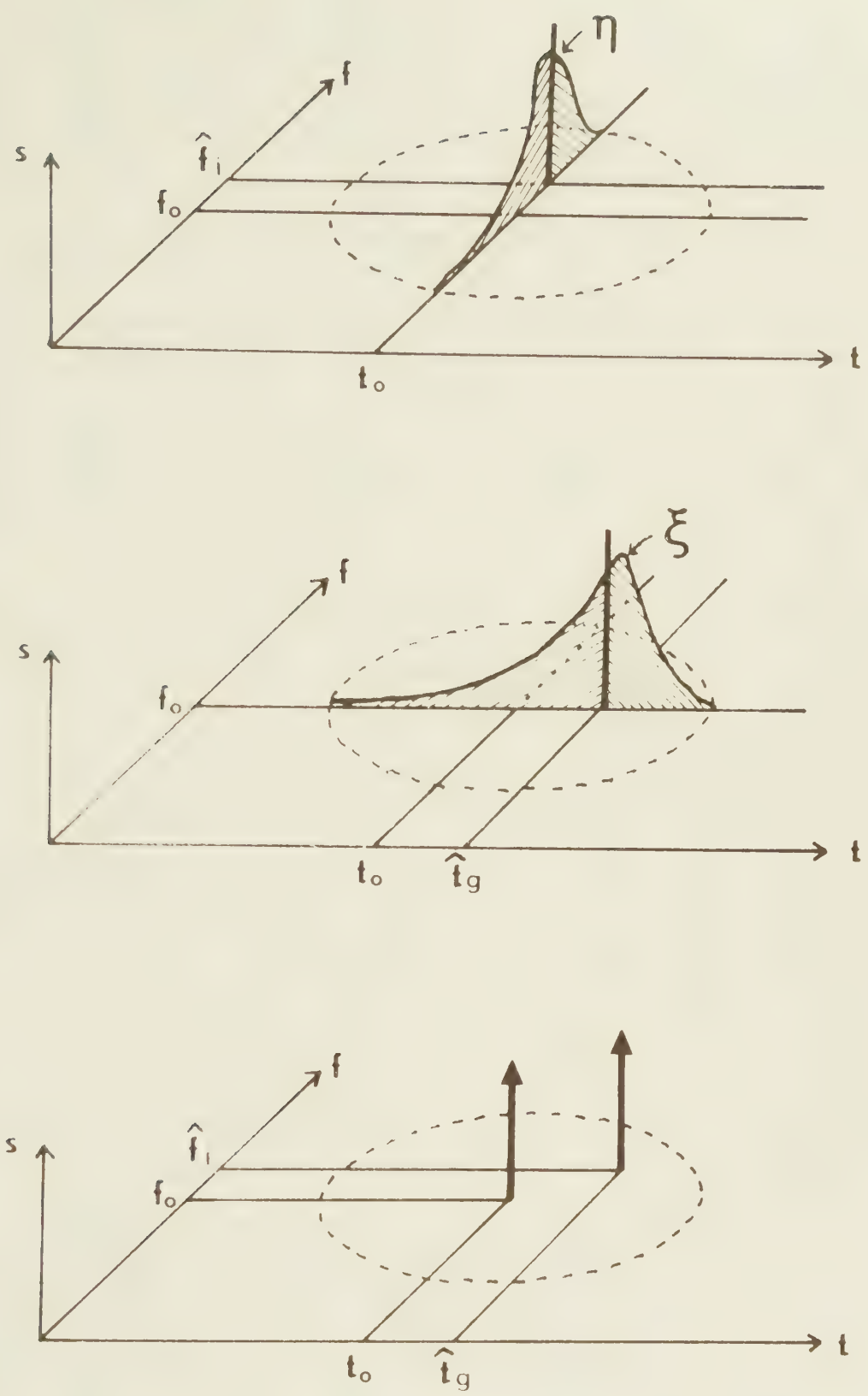



FIG. 1

$\alpha\gamma = (B/\Delta F)^2 \ll 1$
$\alpha\gamma = (B/\Delta F)^2 \sim 1$
$\alpha\gamma = (B/\Delta F)^2 \gg 1$
$\hat{\varepsilon}(\hat{f}_1, \hat{t}_g)$
$\hat{f}_1$
$\hat{t}_g$
$\bar{\varepsilon}(t_0, f_0)$
$f_0$
$t_0$
$|x(t)|^2$
$T_p$
$t$
Puissance du signal
$B_p$
Filtre
$|H(f)|^2$
$|X(f)|^2$
Spectre de puissance

FIG. 2

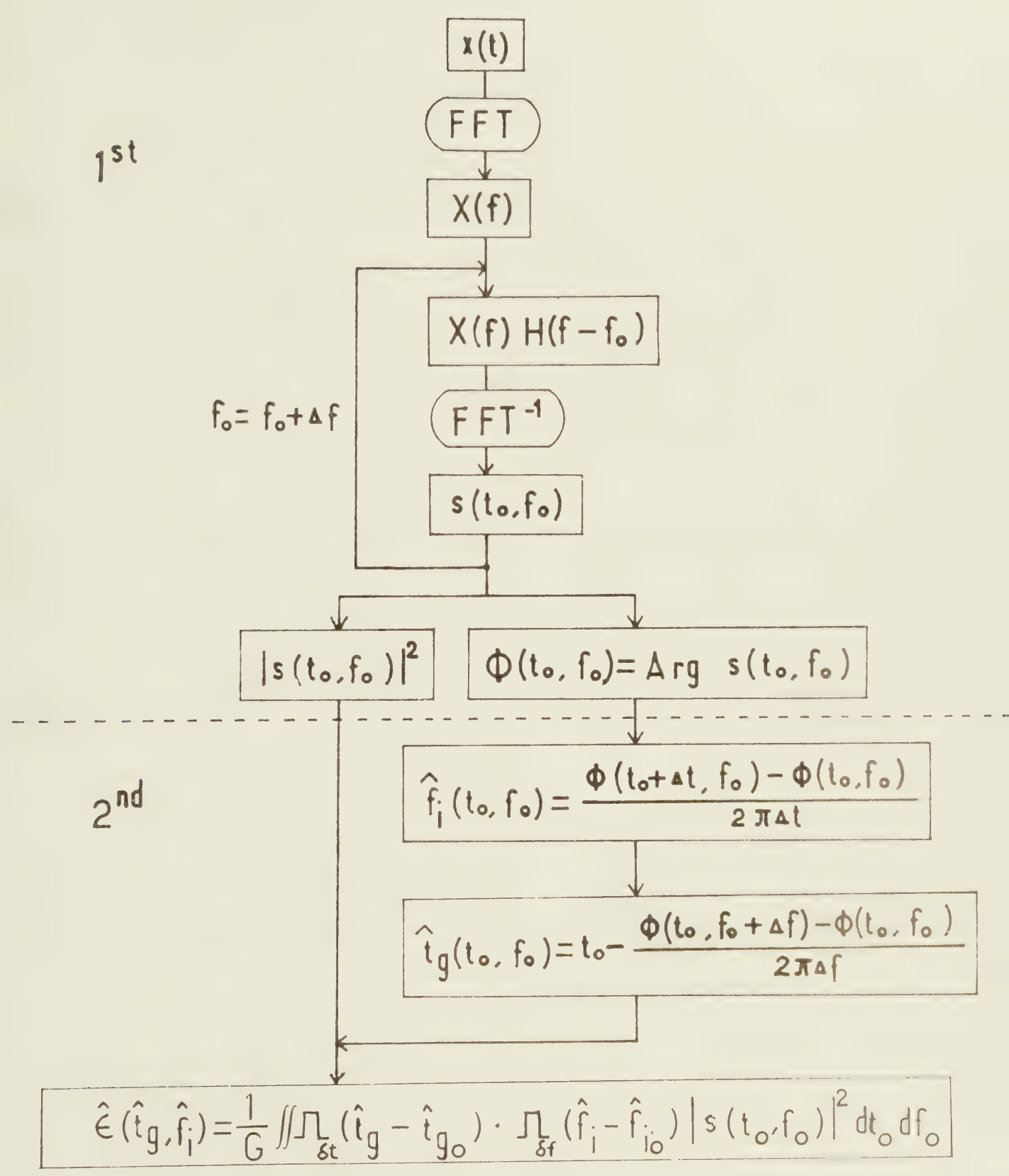

1st
x(t)
FFT
X(f)
X(f) H(f − f_o)
f_o = f_o + Δf
FFT^-1
s(t_o, f_o)
|s(t_o, f_o)|^2
Φ(t_o, f_o) = Arg s(t_o, f_o)
2nd
f̂_i(t_o, f_o) = [Φ(t_o + Δt, f_o) − Φ(t_o, f_o)] / 2πΔt
t̂_g(t_o, f_o) = t_o − [Φ(t_o, f_o + Δf) − Φ(t_o, f_o)] / 2πΔf
ε̂(t̂_g, f̂_i) = (1/G) ∬ Π_δt(t̂_g − t̂_go) · Π_δf(f̂_i − f̂_io) |s(t_o, f_o)|^2 dt_o df_o

FIG. 3

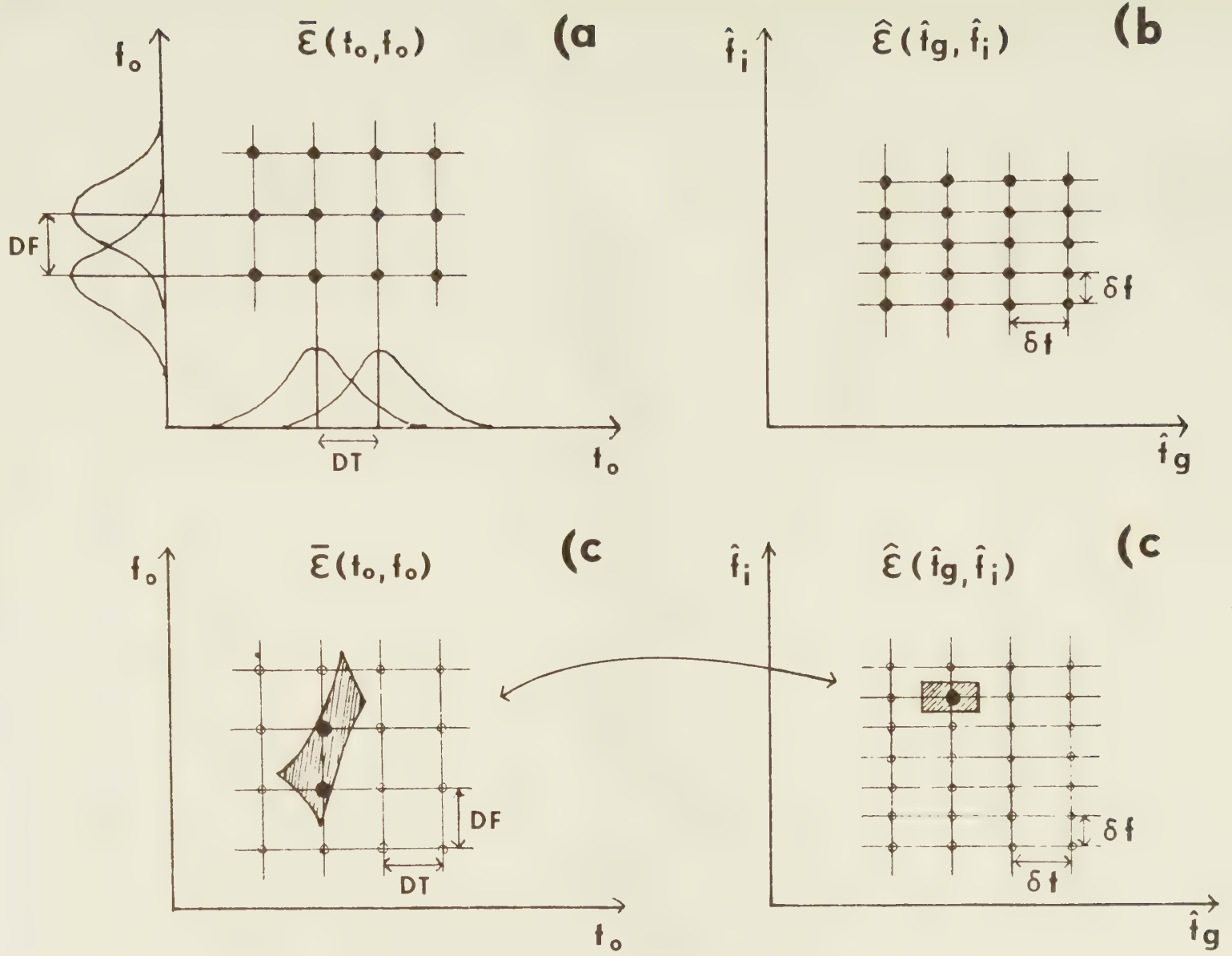

(a
$\bar{\varepsilon}(f_o, f_o)$
$f_o$
DF
DT
$f_o$
(b
$\hat{\varepsilon}(\hat{f}_g, \hat{f}_i)$
$\hat{f}_i$
$\delta f$
$\delta f$
$\hat{f}_g$
(c
$\bar{\varepsilon}(f_o, f_o)$
$f_o$
DF
DT
$f_o$
(c
$\hat{\varepsilon}(\hat{f}_g, \hat{f}_i)$
$\hat{f}_i$
$\delta f$
$\delta f$
$\hat{f}_g$

FIG. 4

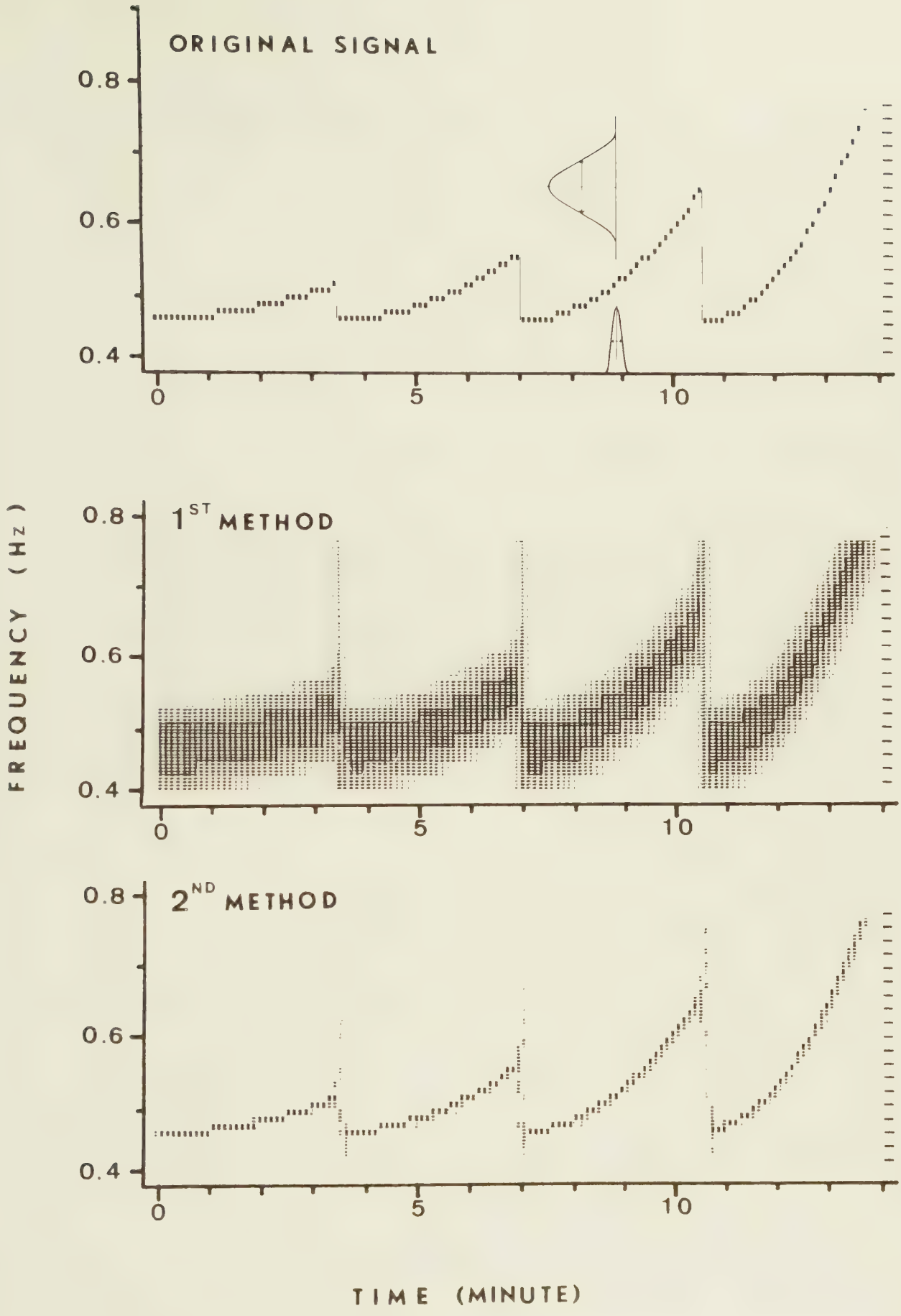

ORIGINAL SIGNAL
1ST METHOD
2ND METHOD
FREQUENCY (Hz)
0.8
0.6
0.4
0
5
10
TIME (MINUTE)

FIG. 5

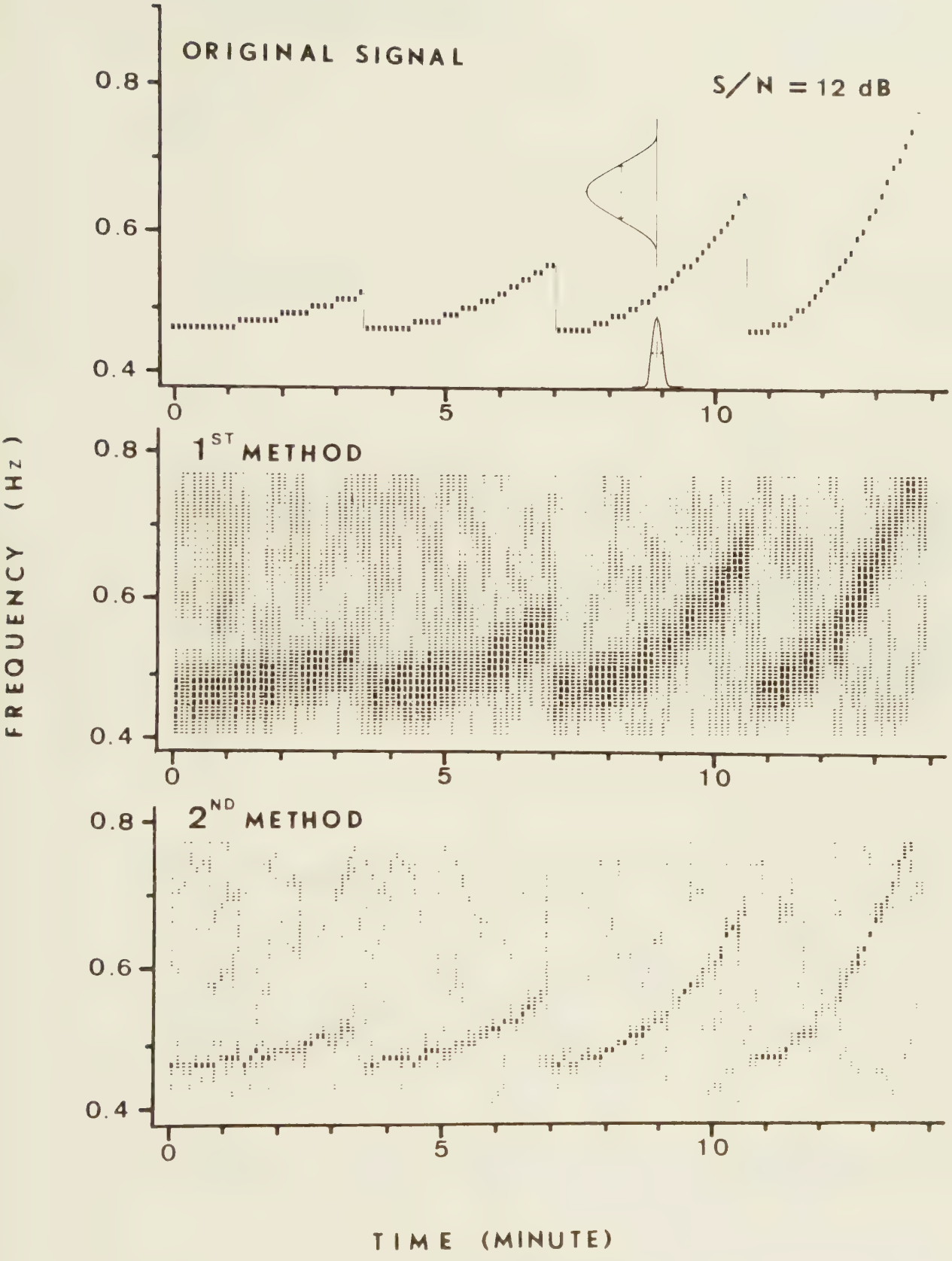

ORIGINAL SIGNAL
S/N = 12 dB
0.8
0.6
0.4
0
5
10
1ST METHOD
0.8
0.6
0.4
0
5
10
2ND METHOD
0.8
0.6
0.4
0
5
10
FREQUENCY (Hz)
TIME (MINUTE)

FIG. 6

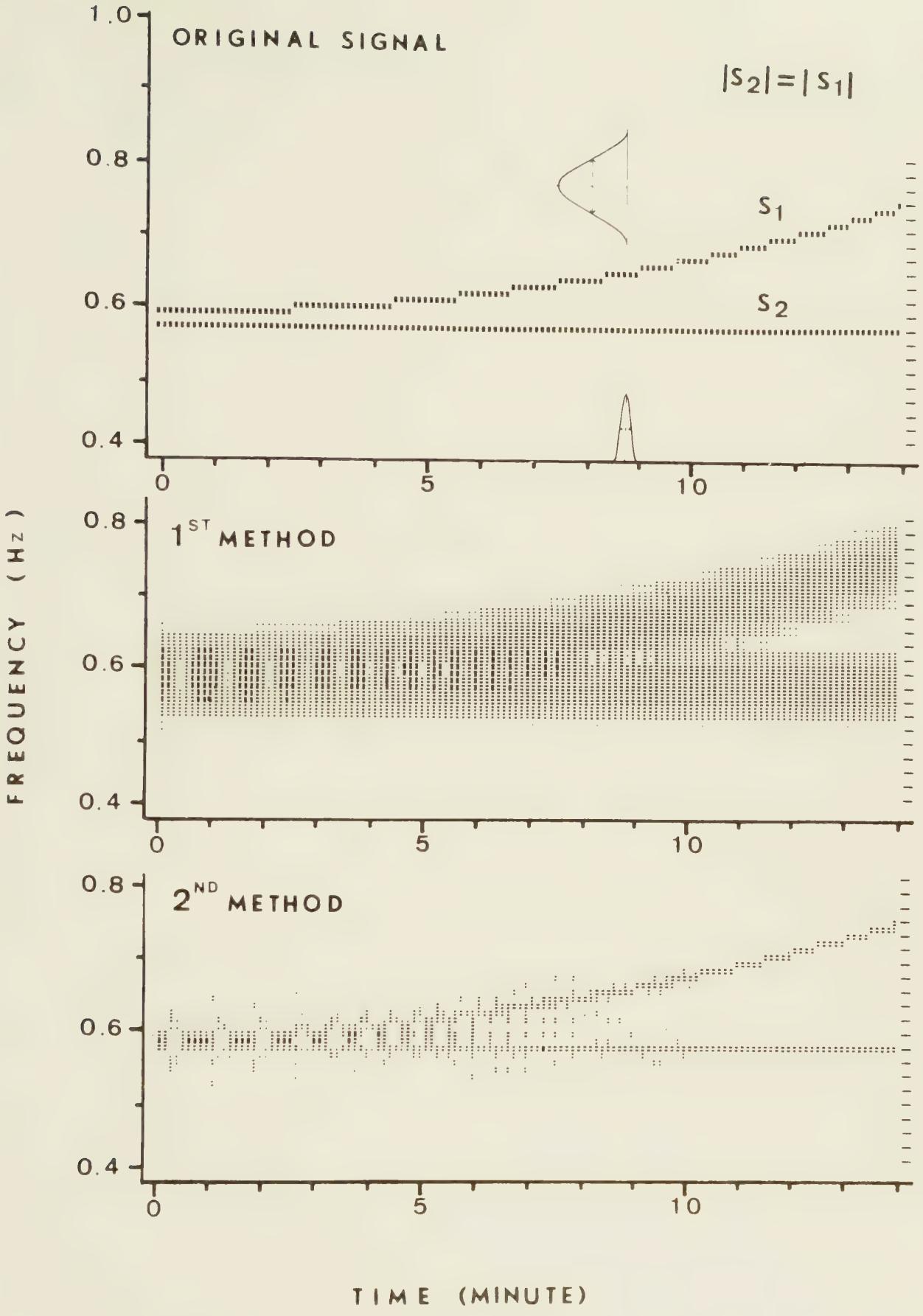

ORIGINAL SIGNAL
$|S_2| = |S_1|$
$S_1$
$S_2$
1.0
0.8
0.6
0.4
0
5
10
1ST METHOD
2ND METHOD
FREQUENCY (Hz)
TIME (MINUTE)

FIG. 7

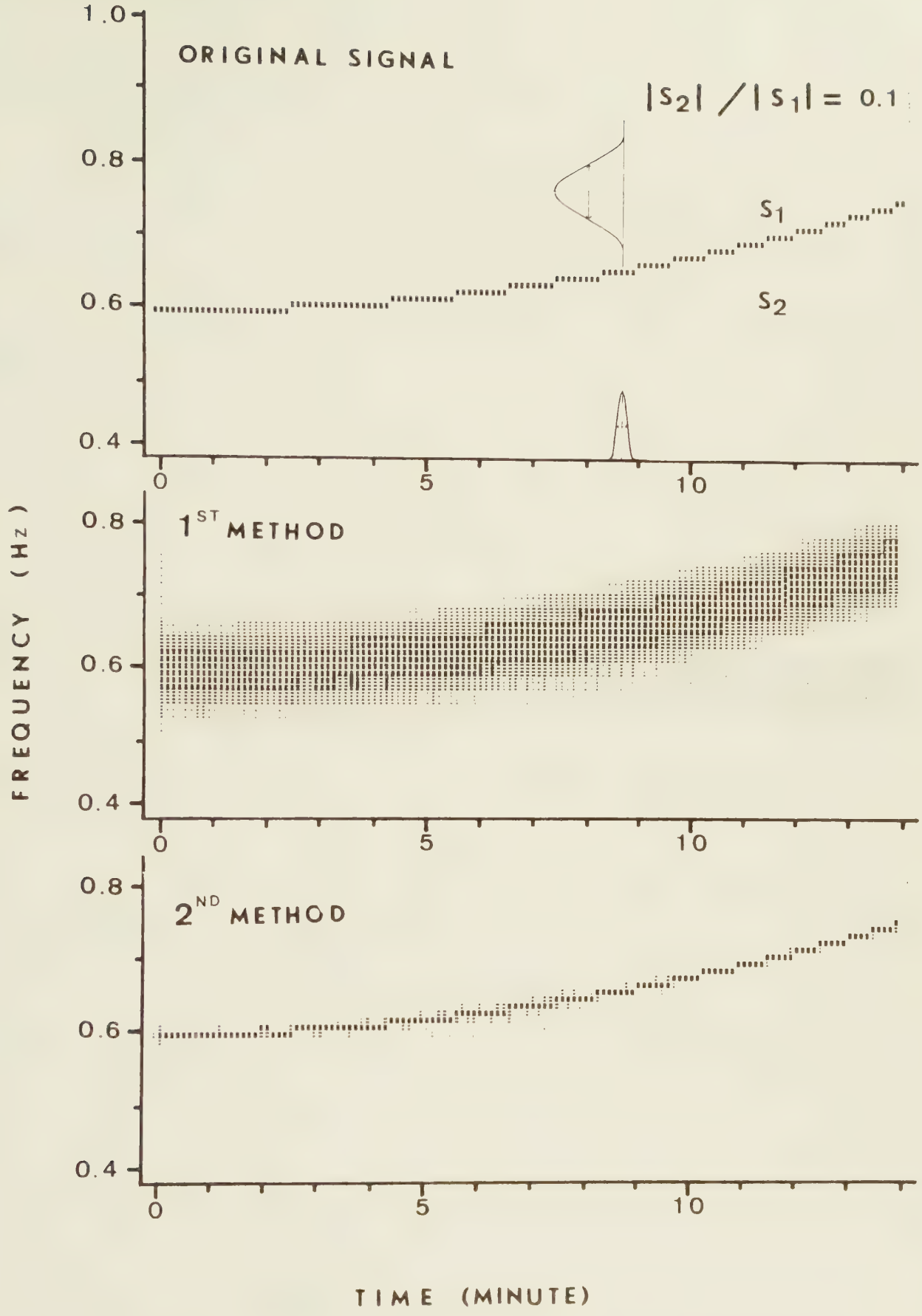

ORIGINAL SIGNAL
|S2| / |S1| = 0.1
S1
S2
1ST METHOD
2ND METHOD
FREQUENCY (Hz)
TIME (MINUTE)
1.0
0.8
0.6
0.4
0
5
10

FIG. 8

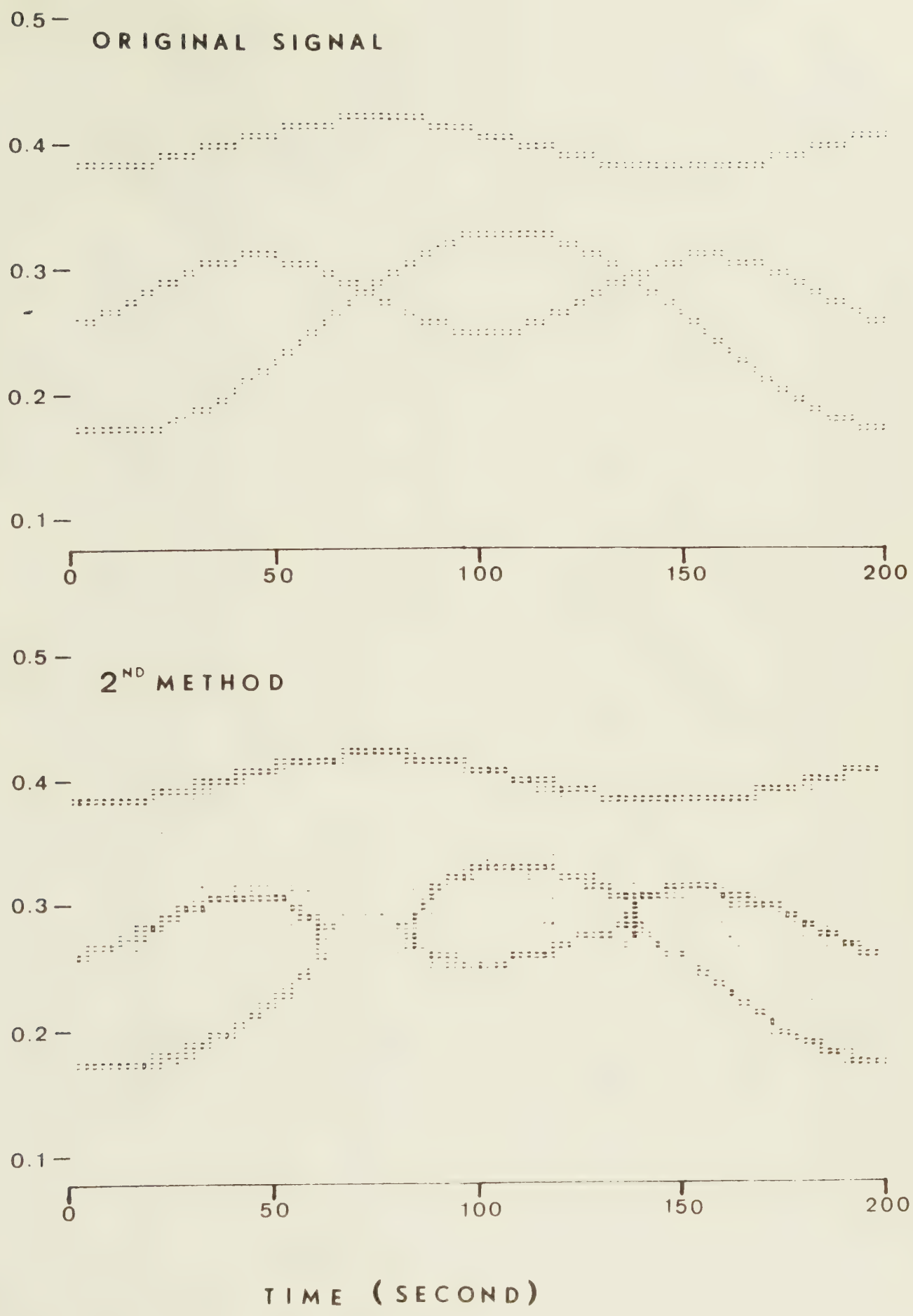

ORIGINAL SIGNAL
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50
100
150
200
2ND METHOD
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
50
100
150
200
TIME (SECOND)

FIG. 9

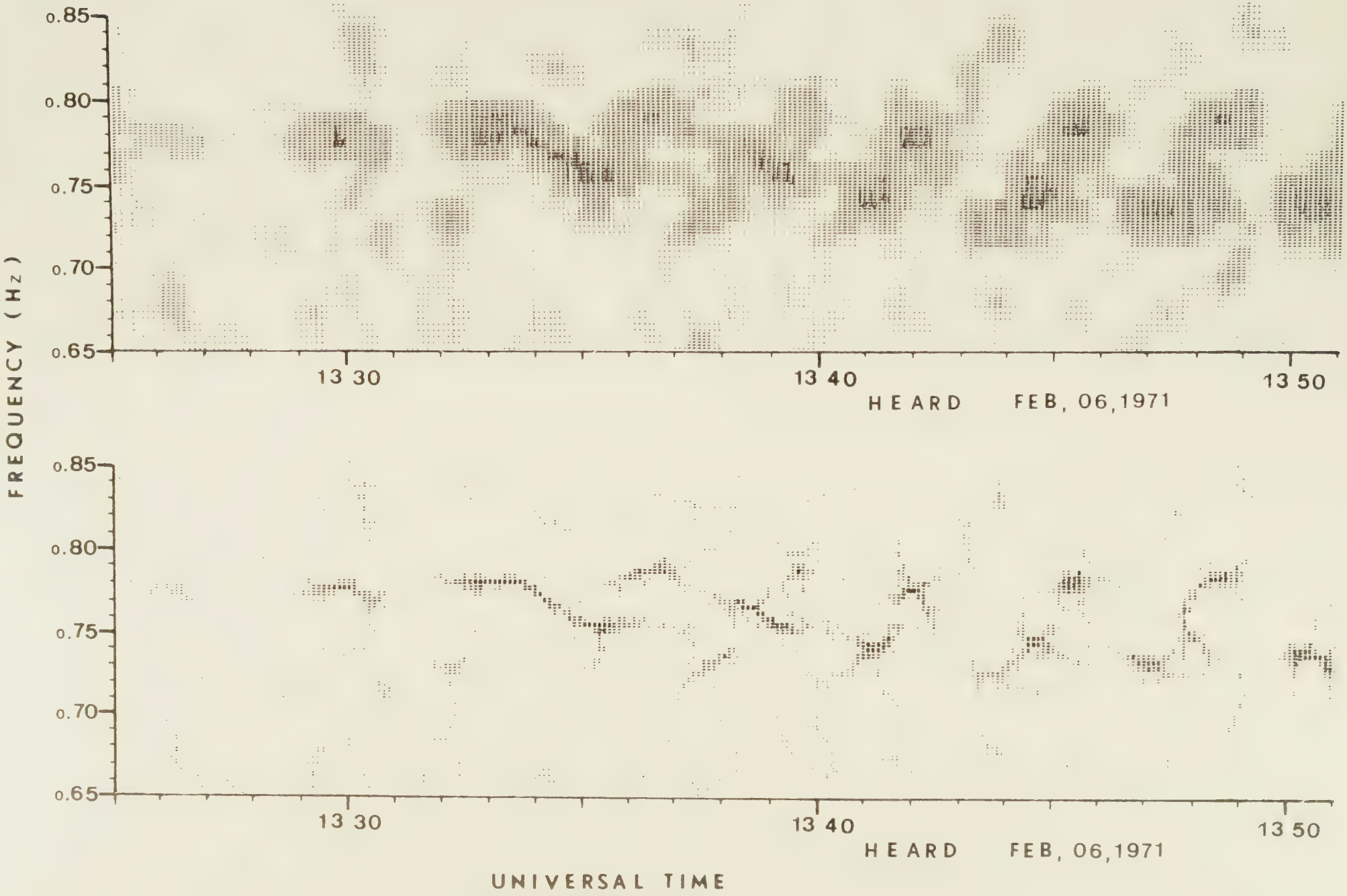

0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
FREQUENCY (Hz)
13 30
13 40
13 50
HEARD FEB, 06,1971
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
13 30
13 40
13 50
HEARD FEB, 06,1971
UNIVERSAL TIME

FIG. 10

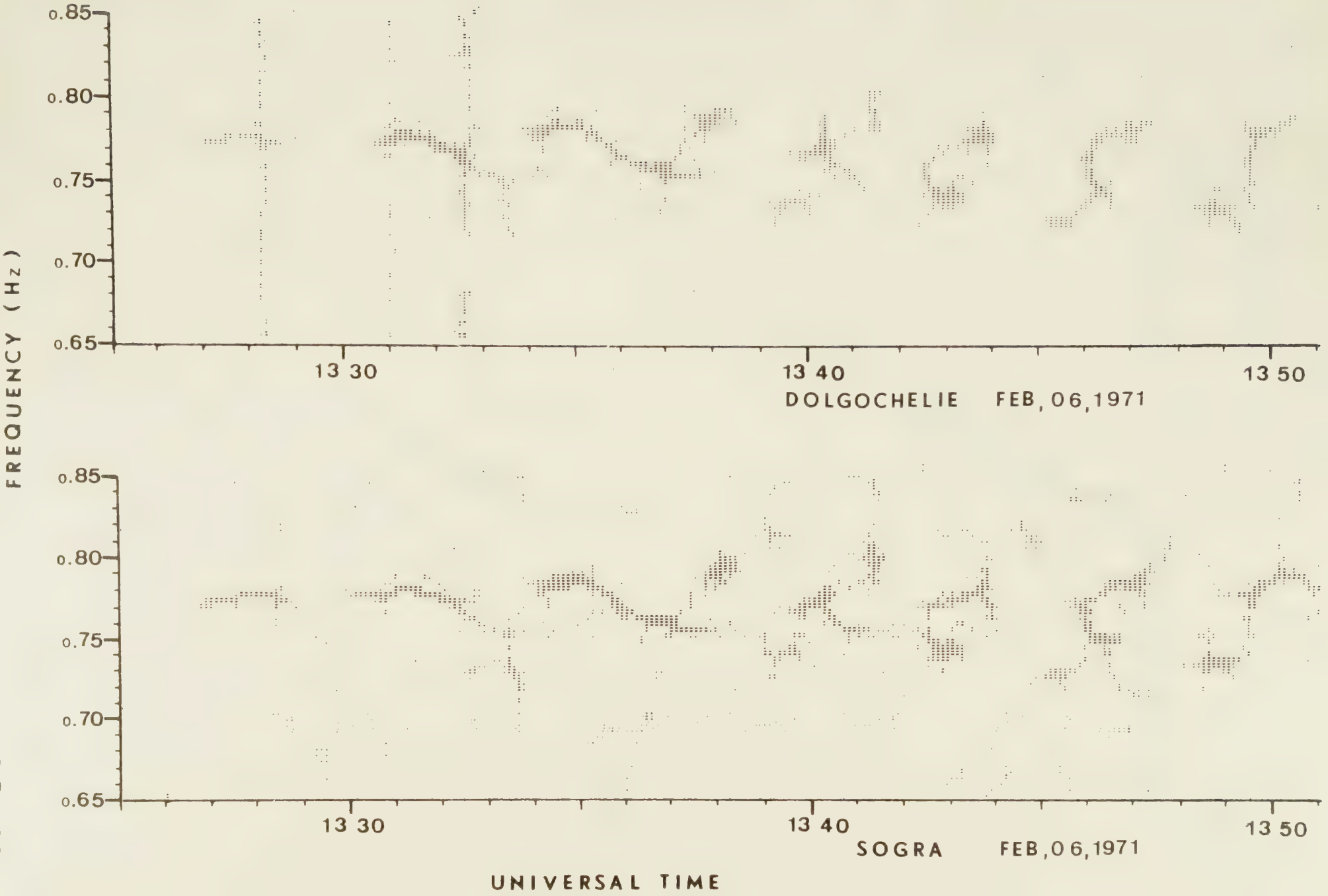
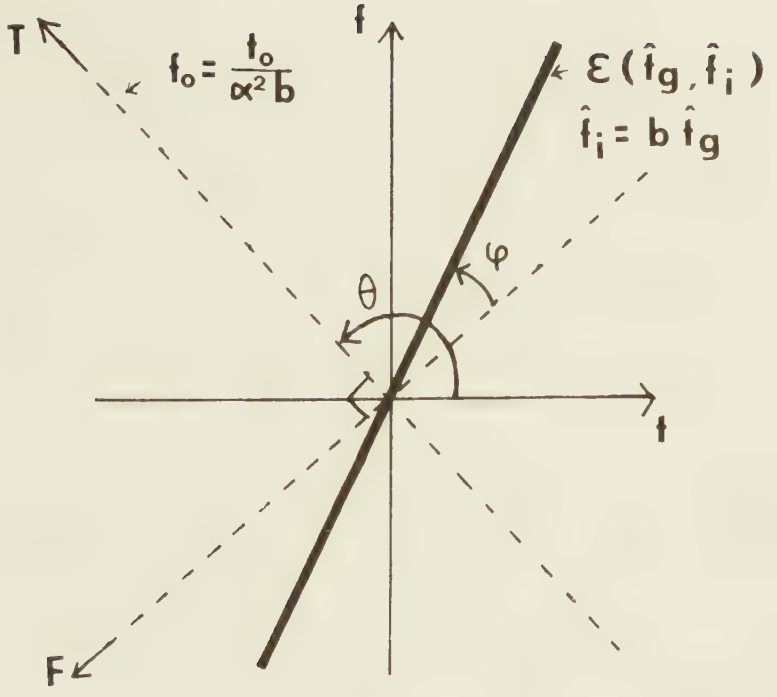

0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
FREQUENCY (Hz)
13 30
13 40
13 50
DOLGOCHELIE FEB, 06, 1971
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
13 30
13 40
13 50
SOGRA FEB, 06, 1971
UNIVERSAL TIME

FIG. 11

(a


T
$f_o = \frac{f_o}{\alpha^2 b}$
f
$\mathcal{E}(\hat{f}_g, \hat{f}_i)$
$\hat{f}_i = b\,\hat{f}_g$
θ
φ
t
F

(b

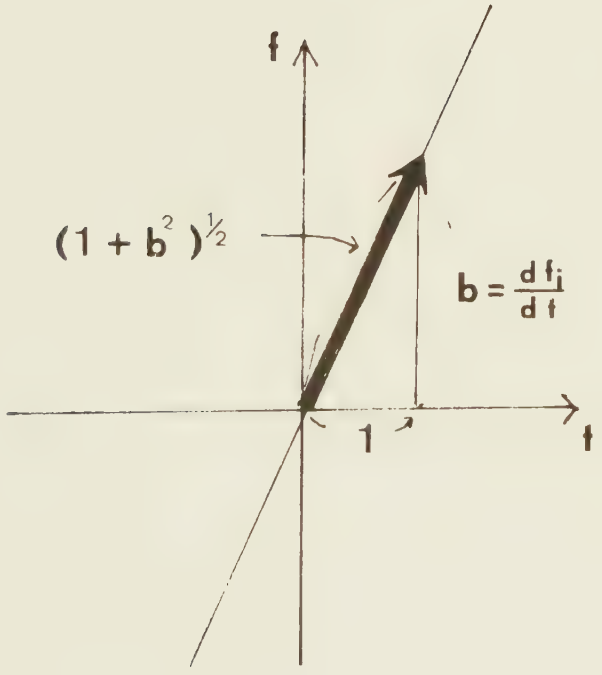

f
$(1 + b^2)^{1/2}$
$b = \frac{df_i}{dt}$
1
t

FIG. 12

2ème PARTIE

# REPRESENTATIONS COMPLEXES D'UN SIGNAL POLARISE

2.1 - INTRODUCTION

2.2 - SIGNAL COMPLEXE ASSOCIE A UN SIGNAL POLARISE DANS UN PLAN

2.2.1.- Influence de la direction des axes de mesure

2.2.2.- Influence de la rotation des axes de mesure.

2.3.- POLARISATION DU SIGNAL DANS UN PLAN

2.3.1. - Fréquences positive et négative

2.3.2. - Expression des paramètres de polarisation dans une base circulaire

2.3.3. - Définition des composantes tournantes.

2.4.- PUISSANCE POLARISEE ET VECTEUR DE POLARISATION

2.4.1. - Puissance polarisée

2.4.2. - Plan de polarisation et le vecteur de polarisation.

2.5.- APPLICATIONS

2.5.1. - Signaux artificiels

2.5.2. - Signaux naturels

2.5.3. - Signaux reçus à bord du satellite GEOS (Simulation).

2.6.- CONCLUSION

2.7.- APPENDICES

2.7.1. - Ellipticité et différence de phase

a) Polarisation en base linéaire et en base circulaire

b) Signification exacte de la différence de phase entre deux composantes orthogonales.

2.7.2. - Signal analytique et composantes tournantes.

2.7.3. - Autres expressions du vecteur de polarisation.

2.7.4. - Résumé des formules utiles.

## 2.1. - INTRODUCTION

Les ondes électromagnétiques sont caractérisées par des grandeurs vectorielles et les mesures sont faites en général sur chacune de leurs trois composantes dans un espace à trois dimensions.

Un des problèmes fondamentaux posés par ce type de mesures à bord d'engins spatiaux est qu'elles ne sont pas effectuées dans un repère fixe, ou considéré comme tel (satellites ou fusées en rotation sur eux-mêmes). Or les grandeurs qui intéressent le géophysicien sont les grandeurs représentées dans le repère fixe (ou considéré comme tel). Lorsque la fréquence de rotation du repère de mesure par rapport au repère "fixe" est très différente de la fréquence du phénomène auquel on s'intéresse, on peut négliger la rotation, au moins dans une analyse préliminaire (⊗). Mais lorsque la fréquence de rotation est comparable à celle du phénomène que l'on cherche à analyser, il est indispensable de tenir compte de la rotation, même au stade préliminaire de l'analyse. En théorie, la correction de rotation n'est pas une opération compliquée (matrice d'Euler bi-dimensionnelle). Toutefois, lorsqu'on a une grande quantité de données à analyser, il vaut mieux éviter ce genre d'opération. Comme dans la plupart des cas, on cherche à obtenir une représentation

---

(⊗) Lorsque la fréquence de rotation ou "fréquence de spin" $f_s$ diffère beaucoup de la fréquence f du signal étudié, l'effet de la rotation se traduit - pour une polarisation linéaire du signal - par une modulation d'amplitude. Lorsque $f_s \gg f$, on a un signal de fréquence $f_s$ modulé à la fréquence f, et inversement lorsque $f_s \ll f$.

spectrale du signal, nous allons montrer qu'il est facile d'introduire la correction de rotation de l'engin à ce stade de l'analyse.

Dans le paragraphe 2.2, nous introduisons le signal complexe $s_{xy} = x_R + j\ y_R$ formé à partir des deux composantes réelles $x_R$ et $y_R$ observées dans le repère tournant. Nous montrons que la rotation du repère se traduit par une simple translation de l'origine des fréquences.

Mais même dans un repère fixe, le spectre du signal complexe $s_{xy}$ ne présente pas les symétries habituelles aux spectres de signaux réels à une seule composante. Ceci est lié à la polarisation éventuelle du signal original. C'est l'objet du paragraphe 2.3 que d'étudier cette polarisation et de montrer que son étude est grandement simplifiée par l'étude du spectre de $s_{xy}$, décomposé en deux parties suivant le signe de la fréquence. Une telle analyse permet d'obtenir une visualisation immédiate des grandeurs caractéristiques de la polarisation (sens de rotation, ellipticité, inclinaison du grand axe de l'ellipse), à l'opposé des analyses spectrales que l'on effectue habituellement sur les composantes orthogonales du signal dans lesquelles ces quantités sont masquées par le mélange des informations de phase et d'amplitude.

Dans le paragraphe suivant (2.4), nous donnons une définition générale de la puissance polarisée, fondée sur l'utilisation du signal complexe $s_{xy}$ et nous essayons de l'étendre au cas des signaux à trois composantes pour la recherche des plans de polarisation.

Dans le paragraphe 2.5 nous donnons plusieurs applications de ces concepts. Nous les appliquons d'abord à l'analyse de signaux artificiellement engendrés (mélanges de plusieurs fréquences, de polarisation et d'ellipticité variables). Puis nous considérons le cas de signaux naturels détectés au sol dans la gamme des ultra-basses fréquences; nous montrons que notre méthode d'analyse sépare particulièrement bien les signaux polarisés à droite des signaux polarisés à gauche. Enfin nous étudions l'application de la méthode aux signaux UBF qui seront détectés à bord du satellite géostationnaire européen GEOS et nous donnons quelques exemples simulés des visualisations envisagées pour les données de ce satellite.

Dans un Appendice (paragraphe 2.6), nous donnons quelques détails complémentaires ou démonstrations qui auraient alourdi le texte principal. Le dernier Appendice résume l'ensemble des formules utiles;

° ° °

## 2.2. - SIGNAL COMPLEXE ASSOCIE A UN SIGNAL POLARISE DANS UN PLAN

Nous examinons dans ce chapitre l'influence de la direction des axes de mesure pour un signal représenté dans un plan. Formons le signal complexe associé au signal réel original.

$$(1) \qquad s_{xy} = x_R + j\, y_R$$

où $x_R$, $y_R$ sont les composantes orthogonales du signal mesurées sur deux axes Ox et Oy.

L'influence de la direction des axes se traduit par un simple terme de phase et l'amplitude est conservée quelle que soit la direction des axes dans le plan. Nous examinons ensuite le cas de la rotation des axes de mesure, et nous montrons que l'influence de la rotation des axes se traduit par une translation des fréquences du spectre de $s_{xy}$.

### 2.2.1. - Influence de la direction des axes de mesure

Nous examinons ici l'influence du choix de la direction des axes de mesure sur un signal représenté dans un plan.

Considérons le cas où le signal est mesuré dans le même plan, mais avec deux systèmes d'axes différents, (Ox,Oy) et (Ox', Oy').

Les composantes orthogonales du signal x' et y' dans le repère (Ox', Oy') peuvent s'exprimer en fonction des compo-

santes $x_R$, $y_R$ dans le repère (Ox, Oy) :

$$(2) \quad \begin{cases} x'_R = x_R \cos\theta + y_R \sin\theta \\ y'_R = -x_R \sin\theta + y_R \cos\theta \end{cases}$$

$\theta$ étant l'angle entre les axes Ox et Ox'.

Mais la combinaison n'étant pas simple, il n'est pas facile de comparer directement les signaux mesurés dans ces deux repères. Par exemple, la puissance de $x'_R$ ne s'exprime pas de façon simple :

$$|x'_R|^2 = (x^2_R + y^2_R) \cos^2[\theta - \text{Arctg}\ (y_R/x_R)]$$

même si la puissance totale est conservée :

$$x'^2_R + y'^2_R = x^2_R + y^2_R$$

Maintenant formons les signaux complexes à deux composantes dans chacun des repères Ox,Oy et Ox', Oy'. D'après l'équation (1), on a :

$$(3) \quad \begin{cases} s_{xy} = x_R + j\, y_R \\ s_{x'y'} = x'_R + j\, y'_R \end{cases}$$

Compte tenu de l'équation (2), les deux signaux sont liés par l'expression :

$$(4) \qquad s_{x'y'} = s_{xy} \cdot \exp[-j\theta]$$

Le changement de repère se traduit simplement par un facteur de phase et la puissance du signal est invariante.

$$|s_{x'y'}|^2 = |s_{xy}|^2 \tag{5}$$

Cette propriété sera intéressante lorsqu'on passera dans le domaine des fréquences. Dans ce domaine, l'équation (4) devient simplement :

$$S_{x'y'}(f) = S_{xy}(f) \cdot \exp(-j\theta) \tag{6}$$

avec $S_{x'y'} = \mathcal{F}\{s_{x'y'}\}$

$S_{xy} = \mathcal{F}\{s_{xy}\}$

$\mathcal{F}\{\ \}$ = transformée de Fourier

Les spectres de puissance des signaux mesurés sont alors identiques quelle que soit la direction des axes.

$$|S_{x'y'}|^2 = |S_{xy}|^2 \tag{7}$$

Les équations (5) et (7) montrent l'utilité de former un signal complexe à deux composantes. Le choix du repère n'a alors aucun effet sur la puissance du signal ni sur celle du spectre.

Cette propriété est bien évidente, mais impossible à utiliser quand on traite séparément les différentes composantes du signal (⊗).

D'autre part, il est important de noter que généralement le spectre de puissance du signal complexe $s_{xy}(t)$ n'est pas symétrique :

$$(7') \qquad |S_{xy}(+f)|^2 \neq |S_{xy}(-f)|^2$$

contrairement au cas du signal réel $x_R(t)$ pour lequel :

$$(8) \qquad |X_R(+f)|^2 = |X_R(-f)|^2$$

$$X_R = \mathcal{F}\{x_R\}$$

Cette asymétrie du spectre $|S_{xy}(f)|^2$ est liée à la polarisation du signal comme nous le montrerons dans le paragraphe 2.3

---

(⊗)

En fait, pour les composantes orthogonales, la puissance totale dans le plan est conservée :

$$\begin{cases} x'^2_R + y'^2_R = x^2_R + y^2_R \\ X'^2_R + Y'^2_R = X^2_R + Y^2_R \end{cases}$$

$X_R$, $Y_R$, $X'_R$, $Y'_R$ sont les transformées de Fourier de $x_R$, $y_R$, $x'_R$, $y'_R$. Mais, $(X_R^2 + Y_R^2)$, $(X'^2_R + Y'^2_R)$ ne sont pas transformées de Fourier de $(x_R^2 + y_R^2)$, $(x'^2_R + y'^2_R)$

### 2.2.2. - Influence de la rotation des axes de mesure

Dans ce paragraphe nous étudions les conséquences d'une mesure dans un système d'axes tournants.

Le système d'axes $O\tilde{x}$, $O\tilde{y}$ tourne dans le même plan que les axes Ox, Oy du repère fixe, avec une fréquence $f_s$.

Les composantes $\tilde{x}_R$ et $\tilde{y}_R$ du signal dans le système tournant peuvent s'exprimer en fonction des composantes $x_R$, $y_R$ dans le repère fixe :

$$(9) \quad \begin{cases} \tilde{x}_R = x_R \cos 2\pi f_s t + y_R \sin 2\pi f_s t \\ \tilde{y}_R = -x_R \sin 2\pi f_s t + y_R \cos 2\pi f_s t \end{cases}$$

Mais les signaux complexes associés aux signaux réels à deux composantes dans les deux repères sont reliés d'une façon plus simple. L'équation (9) devient simplement :

$$(10) \quad s_{\tilde{x},\tilde{y}} = s_{xy} \cdot \exp(-j2\pi f_s t)$$

avec $\begin{cases} s_{xy} = x_R + j\, y_R \\ s_{\tilde{x}\tilde{y}} = \tilde{x}_R + j\, \tilde{y}_R \end{cases}$

Il est facile de voir que la puissance des signaux n'est pas affectée par la rotation des axes.

$$(11) \quad |s_{\tilde{x}\tilde{y}}|^2 = |s_{xy}|^2$$

La différence entre les deux signaux complexes $s_{\tilde{x}\tilde{y}}$ et $s_{xy}$ n'est qu'un simple facteur de phase, mais la phase est un facteur linéaire. Par ailleurs, il est bien connu que la phase linéaire se traduit dans le domaine des fréquences par une translation de l'origine. En effet la transformée de l'équation (10) est :

$$(12)\quad \begin{cases} S_{\tilde{x}\tilde{y}}(f) = \int s_{xy}(t)\, \exp[-j2\pi(f_s+f)t]\,dt, \\ \qquad\qquad = S_{xy}(f + f_s) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} S_{\tilde{x}\tilde{y}} = \mathcal{F}\{s_{\tilde{x}\tilde{y}}\} \\ S_{xy} = \mathcal{F}\{s_{xy}\} \end{cases}$$

L'équation (12) montre que l'influence de la rotation des axes se réduit (pour la représentation en signal complexe) à une simple translation de fréquence égale à $f_s$ dans le domaine des fréquences.

En revanche, les spectres des composantes individuelles $\tilde{X}_R(f)$ et $\tilde{Y}_R(f)$ ne sont pas faciles à exploiter, sauf dans des cas bien particuliers.

$$(13)\quad \begin{cases} \tilde{X}_R(f) = \frac{1}{2}\{X_R(f-f_s)+X_R(f+f_s)-j[Y_R(f-f_s)-Y_R(f+f_s)]\} \\ \tilde{Y}_R(f) = \frac{1}{2}\{Y_R(f-f_s)+Y_R(f+f_s)+j[X_R(f-f_s)-X_R(f+f_s)]\} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{X}_R = \mathcal{F}\{\tilde{x}_R\} \\ \tilde{Y}_R = \mathcal{F}\{\tilde{y}_R\} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_R = \mathcal{F}\{x_R\} \\ Y_R = \mathcal{F}\{y_R\} \end{cases}$$

L'équation (13) montre que, sur les signaux individuels, l'influence de la rotation se traduit par une double translation de fréquence, + $f_s$ et - $f_s$, c'est-à-dire par un dédoublement du spectre.

° ° °

## 2.3.- POLARISATION DU SIGNAL DANS UN PLAN

La propriété la plus intéressante du signal complexe associé à un signal à deux composantes réelles se trouve dans le domaine des fréquences: son spectre est alors asymétrique par rapport à l'origine. Cette différence entre les spectres de fréquences positive et négative est une conséquence de la polarisation du signal.

Dans ce paragraphe, nous commençons par examiner la signification du signe de la fréquence. Puis nous donnons les expressions des paramètres définissant la polarisation dans un système à bases polarisées circulairement. Ensuite, nous introduisons la décomposition du signal complexe à deux composantes selon le signe de la fréquence, (nous l'appelons "décomposition tournante") et nous définissons les paramètres instantanés de polarisation.

### 2.3.1. - Fréquences positive et négative

Par la transformation de Fourier, on peut décomposer le signal sur une base de signaux circulaires. On peut définir le signal par une somme de signaux circulaires comme :

$$s_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f)\ \exp[2\pi jft]df \qquad (14)$$

En effet, une composante à la fréquence $f_o$, $\hat{s}_{xy}(t;f_o)$, s'exprime sous la forme :

$$(15) \qquad \hat{s}_{xy}(t,f_o) = \int \delta(f-f_o) \cdot S_{xy}(f) \cdot \exp[2\pi jft]\, df$$

$$= S(f_o) \cdot \exp[2\pi jf_o t]$$

L'équation (15) montre que cette composante est un signal circulaire qui tourne dans le plan complexe avec une fréquence $f_o$ , et dont le sens de rotation est déterminé par le signe de la fréquence $f_o$. (figure 1).

Dans le cas particulier d'un signal complexe associé à un signal réel à deux composantes, les axes réel et imaginaire du plan complexe correspondent aux axes Ox et Oy suivant lesquels les mesures ont été effectuées. C'est-à-dire que les fréquences positive et négative correspondent au sens de polarisation du signal dans le plan de mesure, respectivement de Ox vers Oy ou de Oy vers Ox. D'autre part le spectre de puissance du signal complexe représente l'intensité de la composante circulaire (équation (15) ). Donc l'asymétrie du spectre, aux fréquences positives ou négatives, est directement liée à la polarisation du signal dans le plan de mesure.

### 2.3.2. - Expression des paramètres de polarisation dans une base circulaire.

Les paramètres de polarisation sont traditionnellement exprimés sur des bases linéaires à partir de l'amplitude de deux composantes orthogonales et de leur différence de phase. (BORN et WOLF, 1959, pp. 26-27, par exemple).

Or l'amplitude des deux composantes orthogonales et leur différence de phase sont très influencées par le choix de la direction des axes de mesure. Et pour définir les paramètres de polarisation il faut toujours tenir compte de ces deux informations: amplitude et phase, simultanément. Un exemple, présenté dans l'appendice 1-b, montre que pour une ellipticité donnée (+0.2), la différence de phase entre les deux composantes peut varier de 22° à 158° suivant la direction des axes de mesure et il n'est donc pas possible de caractériser la polarisation avec le seul terme de phase.

Mais si l'on utilise une décomposition suivant des composantes circulaires cet inconvénient sera réduit. Puisqu'un signal circulaire présente une symétrie autour de l'origine des axes, l'influence de la direction des axes se réduit au terme de phase, et l'amplitude reste invariante.

La décomposition d'une polarisation elliptique en deux polarisations circulaires est d'un usage courant dans le domaine optique (voir par exemple Bruhat et Kastler, 1965, pp.47-49).

Nous utilisons la même décomposition mais en introduisant les concepts de fréquences positive et négative décrits au paragraphe précédent.

On peut écrire le signal complexe associé à un signal réel monochromatique à deux composantes sous la forme d'une somme de deux composantes circulaires de fréquence positive ($+f_o$) et négative ($-f_o$) :

$$(16) \qquad s_{xy}(t) = s_{xy}^{+} + s_{xy}^{-}$$

$$\text{avec} \begin{cases} s_{xy}^{+} = A_1 \exp\left\{ j[2\pi(+f_o)t + \phi_1] \right\} \\ s_{xy}^{-} = A_2 \exp\left\{ j[2\pi(-f_o)t + \phi_2] \right\} \\ A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

La puissance de ce signal est :

$$(17) \quad \begin{cases} |s_{xy}(t)|^2 = s_{xy}^{+} \cdot (s_{xy}^{+})^{*} + s_{xy}^{-} \cdot (s_{xy}^{-})^{*} + 2\mathrm{Re}[s_{xy}^{+}(s_{xy}^{-})^{*}] \\ \qquad = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(4\pi ft + \phi_1 - \phi_2) \end{cases}$$

D'après l'équation (17), l'amplitude du signal complexe vérifie la relation d'inégalité suivante :

$$(18) \qquad |A_1 - A_2| \leq |s_{xy}(t)| \leq A_1 + A_2$$

L'amplitude minimale, $|A_1-A_2|$, et maximale, $A_1+A_2$, correspondent respectivement à la longueur des demi petit axe et demi-grand axe de l'ellipse de polarisation.

D'autre part l'amplitude maximale se produit au temps $t_o$, satisfaisant la relation suivante :

$$(19) \qquad 4\pi f t_o + \phi_1 - \phi_2 = 2\pi n$$

n : entier

Le signal, $s_{xy}$, à l'instant $t_o$ est obtenu en introduisant (19) dans l'équation (16).

$$(20) \qquad s_{xy}(t_o) = (A_1+A_2)\ \exp[j(\theta+m\pi)]$$

$$\text{avec } \theta = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

m : entier

Comme nous avons identifié l'axe Ox avec l'axe réel du plan complexe, $\theta$ est l'angle entre l'axe Ox et le grand axe de l'ellipse de polarisation.

Résumons les résultats obtenus :

$$(21) \quad \begin{cases} a = |s^+| + |s^-| & a = \text{demi grand axe} \\ b = |s^+| - |s^-| & b = \text{demi petit axe (le signe suit les mêmes conventions que l'ellipticité)} \\ \varepsilon = \dfrac{b}{a} = \dfrac{|s^+| - |s^-|}{|s^+| + |s^-|} & \varepsilon = \text{ellipticité. Les signes positif et négatif correspondent respectivement au sens de rotation direct et rétrograde.} \\ \theta = \dfrac{\text{Arg}(s^+)+\text{Arg}(s^-)}{2} & \theta = \text{angle entre l'axe Ox et le grand axe de l'ellipse de polarisation.} \end{cases}$$

Les différents paramètres définissant la polarisation sont donc exprimés d'une façon très simple. En particulier les informations concernant l'amplitude et la phase sont tout à fait séparées; l'ellipticité ne dépend que des amplitudes et la direction du grand axe dépend uniquement de la relation de phase des deux composantes circulaires. L'identité entre les expressions (21) et les expressions utilisées traditionnellement est présentée dans l'appendice 1-b.

### 2.3.3. - Définition des composantes tournantes

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini les paramètres de polarisation dans le cas monochromatique en utilisant les composantes circulaires. Dans ce paragraphe, nous définissons les composantes tournantes et les paramètres de polarisation instantanée.

Dans le cas général, un signal peut être décomposé d'une façon unique en deux composantes selon le sens de rotation, ou bien selon le signe de la fréquence. Nous appelons ces composantes les "composantes tournantes".

D'abord commençons par décomposer le spectre du signal, $S_{xy}(f)$ en deux parties selon le signe de la fréquence :

$$
(22)\quad \begin{cases} S_{xy}(f) = S_{xy}^{+}(f) + S_{xy}^{-}(f) \\ \text{avec} \begin{cases} S_{xy}^{+}(f) = \begin{cases} S_{xy}(f) & \text{pour } f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \\ S_{xy}^{-}(f) = \begin{cases} 0 & f > 0 \\ S_{xy}(+f) & f < 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

Les composantes correspondantes dans le domaine temps peuvent être obtenues simplement par les transformées de Fourier de chacun des spectres correspondants :

$$(23)\quad \begin{cases} s_{xy}(t) = s^{+}_{xy}(t) + s^{-}_{xy}(t) \\ \text{avec} \begin{cases} s^{+}_{xy}(t) = \int_{0}^{+\infty} S_{xy}(f)\, \exp[2\pi jft]df = \int_{-\infty}^{+\infty} S^{+}_{xy}(f)\, \exp[2\pi jft]df \\ s^{-}_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{0} S_{xy}(f)\, \exp[2\pi jft]df = \int_{-\infty}^{+\infty} S^{-}_{xy}(f) \exp[2\pi jft]df \end{cases} \end{cases}$$

(Ces deux composantes peuvent être écrites sous une autre forme, afin de les comparer avec la notion de signal analytique. Ceci est fait dans l'appendice 2).

En utilisant ces composantes tournantes, on peut définir les paramètres instantanés de polarisation.

En remplaçant dans l'équation (21) les composantes circulaires par les composantes tournantes, on obtient les paramètres instantanés :

$$(21')\quad \begin{cases} a(t) = |s^{+}_{xy}(t)| + |s^{-}_{xy}(t)| \\ b(t) = |s^{+}_{xy}(t)| - |s^{-}_{xy}(t)| \\ \varepsilon(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)} \\ \qquad = \dfrac{|s^{+}_{xy}(t)| - |s^{-}_{xy}(t)|}{|s^{+}_{xy}(t)| + |s^{-}_{xy}(t)|} \\ \theta(t) = \frac{1}{2}[\text{Arg } s^{+}_{xy}(t) + \text{Arg } s^{-}_{xy}(t)] \end{cases}$$

## 2.4. - PUISSANCE POLARISEE ET VECTEUR DE POLARISATION

Dans la section précédente, nous avons défini les paramètres de polarisation liés à la géométrie de l'ellipse de polarisation du signal. Dans cette section nous nous attachons plutôt à la notion de puissance. D'abord nous examinons la signification de la notion de puissance polarisée en la décrivant en terme de composantes tournantes et nous définissons les puissances polarisées circulairement et linéairement. Comme le plan de polarisation est spécialement lié à la polarisation circulaire, on peut définir un plan de polarisation avec un vecteur de polarisation qui a une longueur égale à la puissance polarisée circulairement et perpendiculaire au plan de polarisation. Et nous essayons de définir le plan de polarisation dans le cas d'un signal à trois dimensions avec ce vecteur de polarisation.

### 2.4.1. - Puissance polarisée

Dans ce paragraphe nous essayons de définir la puissance de polarisation circulaire et la puissance de polarisation linéaire en interprétant la notion de puissance polarisée définie par Born et Wolf (1959) et développée par Fowler et al. (1967).

La méthode de Born et Wolf (1959) consiste en la détermination des paramètres de polarisation intégrés, à partir de la matrice de cohérence. L'application de cette méthode à l'analyse de données géophysiques a fait l'objet de nombreux

travaux (voir par exemple Rankin et Kurty, 1970; Mc Pherron et al, 1972; Samson, 1972).

La matrice de cohérence, $\underline{\underline{J}}$, est exprimée soit sous forme temporelle, soit sous forme fréquentielle comme(⊗) :

$$(24) \qquad J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \langle x_a x_a^* \rangle & \langle x_a y_a^* \rangle \\ \langle y_a x_a^* \rangle & \langle y_a y_a^* \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \langle X_a X_a^* \rangle & \langle X_a Y_a^* \rangle \\ \langle X_a Y_a^* \rangle & \langle Y_a Y_a^* \rangle \end{bmatrix}$$

$x_a$ $y_a$ = signaux analytiques associés aux signaux mesurés $x_R$, $y_R$.

$X_a$ $Y_a$ = spectres des signaux analytiques

$\langle\ \rangle$ = intégration $\int dt$ ou $\int df$

D'abord commençons par exprimer cette matrice de cohérence soit en terme de composantes circulaires en fréquence, soit en terme de composante tournante en temps. Les signaux analytiques $x_a$,$y_a$ et leurs spectres sont exprimés avec les composantes tournantes par les équations (A-36) et (A-37) de l'Appendice 2 :

---

(⊗) Nous introduisons les facteurs $\frac{1}{2}$ pour que la trace de [J] soit égale à $E_o$, $E_o$ étant la puissance totale du signal réel. (Voir également Appendice 2.1.2.)

$$E_o = \int (x_R^2 + y_R^2)\,dt = \int (X_R^2 + Y_R^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int x_a \cdot x_a^* + y_a \cdot y_a^*\,dt = \frac{1}{2}\int X_a \cdot X_a^* + Y_a \cdot Y_a^*\,df$$

$$(25)\quad \begin{cases} x_a(t) = \left\{ s_{xy}^{+} + (s_{xy}^{-})^{*} \right\} \\ y_a(t) = -j\left\{ s_{xy}^{+} - (s_{xy}^{-})^{*} \right\} \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} X_a(f) = \left\{ S_{xy}^{+} + (S_{xy}^{-})^{*} \right\} \\ Y_a(f) = -j\left\{ S_{xy}^{+} - (S_{xy}^{-})^{*} \right\} \end{cases}$$

Comme l'équation (24) et les équations (25), (26) ont des formes parfaitement identiques en temps et en fréquence, il nous suffira de traiter l'un des deux cas. L'autre peut être obtenu par une simple transcription. Ici nous traitons l'aspect fréquentiel.

Avec l'équation (24) et l'équation (26) les éléments de la matrice de cohérence sont exprimés comme :

$$(27)\quad \begin{cases} J_{xx} = \frac{1}{2} < |S^{+}|^2 + |S^{-}|^2 + 2\mathrm{Re}\{S^{+}\cdot S^{-}\} > \\ J_{yy} = \frac{1}{2} < |S^{+}|^2 + |S^{-}|^2 - 2\mathrm{Re}\{S^{+}\cdot S^{-}\} > \\ J_{xy} = \frac{j}{2} < |S^{+}|^2 - |S^{-}|^2 - 2j\,\mathrm{Im}\{S^{+}\cdot S^{-}\} > \\ J_{yx} = J_{xy}^{*} \end{cases}$$

où nous avons omis, pour raison de simplification de l'écriture, les indices xy associés aux grandeurs $S^{+}$ et $S^{-}$.

La puissance polarisée intégrée, $P$ , et la puissance totale intégrée, $T$ , sont définies avec les éléments de la matrice de cohérence comme :

$$(28)\quad \begin{cases} \langle P \rangle = \left\{ (\mathrm{Tr}\ \underline{\underline{J}})^2 - 4\ \mathrm{Det}\ \underline{\underline{J}} \right\}^{1/2} \\ \langle T \rangle = \mathrm{Tr}\ \underline{\underline{J}} \end{cases}$$

En utilisant l'équation (27), ces puissances peuvent être exprimées en termes de composantes tournantes comme :

$$(28')\quad \begin{cases} \langle P \rangle = \left\{ \langle\, |S^+|^2 - |S^-|^2 \,\rangle^2 + |\langle 2S^+ \cdot S^- \rangle|^2 \right\}^{1/2} \\ \langle T \rangle = \langle |S^+|^2 + |S^-|^2 \rangle \end{cases}$$

On remarque facilement que la puissance totale, $T$, est donnée par la somme des puissances des deux composantes de fréquence positive, $S^{+\,2}$, et de fréquence négative, $S^{-\,2}$.

$$(29)\qquad T = |S^+|^2 + |S^-|^2$$

D'autre part la puissance de polarisation intégrée est exprimée par la somme de deux termes dont la signification sera clairement illustrée en les écrivant en fonction de l'ellipticité, $\varepsilon$, et de la direction du grand axe de l'ellipse de polarisation, $\theta$.

$$(30)\qquad \langle P \rangle = \left\{ \langle P_c \rangle^2 + |\langle P_l \rangle|^2 \right\}^{1/2}$$

où $P_c$ et $P_l$ sont les termes "circulaire" et "linéaire" définis par :

$$
(31)\quad
\begin{cases}
P_c = \langle |S^+|^2 - |S^-|^2 \rangle = \langle a^2 \varepsilon \\
P_l = \langle 2.S^+.S^- \rangle = \langle 2|S^+|.|S^-|.\exp[j(\mathrm{Arg}\, S^+ + \mathrm{Arg}\, S^-)] \rangle \\
\qquad = \langle \frac{a^2}{2}(1-\varepsilon^2) \cdot \exp[j2\theta] \rangle
\end{cases}
$$

Quand le signal est polarisé circulairement, $|\varepsilon| = 1$, et seul le terme $P_c$ de polarisation circulaire contribue à la puissance polarisée P. Inversement quand le signal est polarisé linéairement, $\varepsilon = 0$, et seul le terme $P_l$ contribue à l'expression de P. On pourrait donc interpréter $P_c$ et $P_l$ respectivement comme la puissance polarisée circulairement et la puissance polarisée linéairement. Toutefois, les deux grandeurs ainsi définies ne sont pas réelles positives. Nous examinerons plus loin la signification de la phase et du signe.

On remarquera sur l'équation (31), que lorsque le sens de rotation du signal est aléatoire, $\varepsilon$ est aléatoire, et sa contribution à l'intégration sur $P_c$ est nulle. De même, quand la direction de l'ellipse de polarisation est aléatoire ($\theta$ aléatoire) la contribution dans l'intégration de $P_l$ est nulle, puisque $P_l$ sera répartie uniformément dans le plan complexe. Donc pour tous les signaux aléatoires qui vérifient simultanément ces deux conditions, les deux termes sont nuls et la puissance polarisée $P_l$ de l'équation (30) est nulle également.

La puissance polarisée circulaire, $P_c$, et la puissance polarisée linéaire $P_l$ peuvent aussi s'exprimer d'une façon plus simple en introduisant l'angle $\beta'$ défini par :

$$(32) \qquad \sin\beta' = \hat{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \frac{P_c}{T} = \frac{|S^+_{XY}|^2 - |S^-_{XY}|^2}{|S^+_{XY}|^2 + |S^-_{XY}|^2}$$

alors les équations (31) deviennent :

$$(31') \quad \begin{cases} \langle P_c \rangle = \langle T \sin\beta' \rangle \\ \\ \langle P_l \rangle = \langle T \cos\beta' \cdot \exp|j2\theta| \rangle \end{cases}$$

T étant la puissance totale, l'angle $\beta'$ définit la répartition de la puissance polarisée entre les deux puissances, circulaire et linéaire.

Le degré de polarisation R est défini comme le rapport entre la puissance polarisée et la puissance totale :

$$(33) \qquad \langle R \rangle = \frac{\langle P \rangle}{\langle T \rangle}$$

En introduisant les équations(29) et (30) on obtient:

$$(34) \qquad \langle R \rangle = \frac{\left\{ \langle P_c \rangle^2 + |\langle P_l \rangle|^2 \right\}^{1/2}}{\langle T \rangle} = \left\{ \left| \frac{\langle T \sin\beta' \rangle}{\langle T \rangle} \right|^2 + \left| \frac{\langle T \cos\beta' \exp|2j\theta| \rangle}{\langle T \rangle} \right|^2 \right\}^{1/2}$$

On voit que le degré de polarisation est la moyenne de deux termes, qui peuvent s'interpréter chacun comme des degrés de polarisation, circulaire ou linéaire.

Il faut noter qu'en enlevant l'intégration, c'est-à-dire en introduisant le paramètre instantané, le degré de polarisation est toujours égal à 1 :

$$(35) \qquad R = \left\{ \left[\frac{T\sin\beta'}{T}\right]^2 + \left[\frac{T\cos\beta'}{T}\right]^2 \right\}^{1/2} = 1$$

c'est-à-dire que la puissance totale instantanée est toujours égale à la puissance polarisée, instantanée.

$$(36) \qquad T = P = \left[P_c^{\,2} + |P_l|^2\right]^{1/2}$$

Maintenant examinons la signification du signe et de la phase des puissances polarisées circulairement et linéairement, $P_c$ et $P_l$. $P_l$ est une quantité complexe, d'après l'équation (31).

$$(31) \qquad P_l = 2\, S^+ . S^-$$

A la notion de polarisation linéaire est toujours attachée une notion de direction de polarisation. La puissance polarisée linéairement doit donc contenir une information liée à la direction de polarisation. En effet la direction du grand axe intégrée $\langle\theta\rangle$, qui s'exprime en termes d'éléments de la matrice de cohérence (Fowler, 1967) :

$$(37) \qquad \tan\langle 2\theta\rangle = \frac{2\ \mathrm{Re}\{J_{xy}\}}{J_{xx} - J_{yy}}$$

s'exprime également en termes de composantes tournantes comme :

$$\tan\langle 2\theta\rangle = \frac{\langle \mathrm{Im}(2S^{+}_{xy} \cdot S^{-}_{xy})\rangle}{\langle \mathrm{Re}(2S^{+}_{xy} \cdot S^{-}_{xy})\rangle}$$

c'est-à-dire que :

$$\langle 2\theta\rangle = \mathrm{Arg}\langle 2S^{+}_{xy} \cdot S^{-}_{xy}\rangle = \mathrm{Arg}\langle P_l\rangle \qquad (37')$$

Donc, la phase de la puissance de polarisation linéaire est liée directement à la direction moyenne du grand axe de l'ellipse de polarisation et, quand la polarisation est linéaire, à la direction de cette polarisation.

D'ailleurs, lorsque $\varepsilon = 0$, la deuxième équation (31) donne bien en module, la puissance du signal polarisé linéairement.

D'autre part la puissance polarisée circulairement $P_c$, qui, elle, est une quantité réelle (voir équation (31) ), peut prendre en revanche des valeurs aussi bien négatives que positives. Nous l'avons défini avec l'équation (31) comme :

$$P_c = |S^{+}_{xy}|^2 - |S^{-}_{xy}|^2 \qquad (31)$$

Le signe de $P_c$ dépend donc de la puissance relative entre $|S^{+}_{xy}|^2$ et $|S^{-}_{xy}|^2$. Par ailleurs $|S^{+}_{xy}|$ et $|S^{-}_{xy}|$ sont les deux signaux polarisés circulairement, mais de sens de rotation opposés. Donc on pourrait considérer $P_c$ comme un flux d'énergie à travers le plan de polarisation, proportionnel à la surface balayée par chacun des deux signaux, en attribuant un signe différent

selon le sens de rotation. Et nous pouvons aussi attribuer à cette puissance polarisée une direction, perpendiculaire au plan (Figure 2).

Par ce procédé, cette puissance polarisée devient un vecteur de polarisation, que nous utiliserons dans le paragraphe suivant pour la recherche du plan de polarisation dans le cas de trois dimensions.

### 2.4.2. - Plan de polarisation et vecteur de polarisation

Le plan de polarisation peut être défini pour les signaux polarisés circulairement et elliptiquement. Etant donné que les signaux polarisés linéairement n'ont pas de plan de polarisation, il sera raisonnable de définir ce plan de polarisation en utilisant seulement la puissance polarisée circulairement. Donc nous définirons le plan de polarisation à l'aide d'un vecteur de polarisation $\vec{P}$ perpendiculaire au plan de polarisation et de longueur égale à la puissance polarisée circulairement.

Considérons d'abord le cas simple où le plan de polarisation du signal coïncide avec le plan de mesure (Ox,Oy). Dans ce cas le vecteur de polarisation est parallèle à l'axe z qui est perpendiculaire au plan (Ox,Oy). Donc, le vecteur de polarisation $\vec{P}$ est défini comme :

$$(38)\quad \begin{cases} \vec{P} = P_{C_{xy}} \cdot \vec{k} \\ \qquad = (|s^{+}_{xy}|^2 - |s^{-}_{xy}|^2) \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$\vec{k}$ = Vecteur unitaire parallèle à l'axe z.

$P_{C_{xy}}$ = Puissance polarisée circulairement dans le plan Ox,Oy,

$s^{+}_{xy}$, $s^{-}_{xy}$ = composantes tournantes du signal dans le plan Ox,Oy

Nous remarquons que le vecteur de polarisation ainsi défini représente non seulement le plan de polarisation mais aussi le sens de la rotation du signal suivant le signe des composantes :

| | |
|---|---|
| $P_z = P_{C_{xy}} > 0$ | rotation de sens direct dans le plan Ox,Oy. |
| $P_z = P_{C_{xy}} < 0$ | rotation du sens rétrograde dans le plan Ox,Oy. |

Lorsque le plan de polarisation possède une orientation quelconque par rapport aux axes de références (Ox,Oy,Oz), on réduit le problème au cas précédent en analysant séparément les projections du signal sur les plans de référence (Ox,Oy), (Oy,Oz) et (Oz,Ox).(⊗)

---

(⊗) Comme chacun de ces plans est perpendiculaire aux autres, le vecteur de polarisation obtenu pour chacun des plans est orthogonal aux autres. Ce qui nous permet d'avoir les composantes scalaires du vecteur de polarisation perpendiculairement à chaque plan.

D'où l'introduction des trois signaux complexes :

$$\begin{cases} s_{xy} = x_R + j\, y_R \\ s_{yz} = y_R + j\, z_R \\ s_{zx} = z_R + j\, x_R \end{cases}$$

A chacun de ces signaux complexes, on associe comme précédemment un vecteur de polarisation, donné par l'équation (38): ce procédé permet de définir le vecteur de polarisation P de composantes scalaires :

$$(39) \quad \begin{cases} P_x = |s_{yz}^{+}|^2 - |s_{yz}^{-}|^2 = P_{c\ yz} \\ P_y = |s_{zx}^{+}|^2 - |s_{zx}^{-}|^2 = P_{c\ zx} \\ P_z = |s_{xy}^{+}|^2 - |s_{xy}^{-}|^2 = P_{c\ xy} \end{cases}$$

Nous avons obtenu ce résultat par une extension directe du cas à deux dimensions, mais il est évident qu'il y a redondance d'information dans les équations (39). En fait $s_{xy}$, $s_{yz}$, $s_{zx}$ ne sont pas indépendants.

On peut exprimer $P_x$,$P_y$ avec $s_{xy}^{+}$, $s_{xy}^{-}$ et $z^{+}$, en combinant $P_x$,$P_y$ sous une forme complexe comme :

$$
(40)\quad \left\{ \begin{array}{l} P_{xy} = P_x + j\, P_y \\ \\ \quad = |s_{yz}^{+}|^2 - |s_{yz}^{-}|^2 + j\{|s_{zx}^{+}|^2 - |s_{zx}^{-}|^2\} \\ \\ \quad = 2\,[z^{+} \,.\, (S_{xy}^{-})^{*} - (z^{+})^{*} \,.\, S_{xy}^{+}] \end{array} \right.
$$

$z^+$ étant le signal analytique associé à $z_R$, ce signal $z^+$ étant lui-même la partie du signal z correspondant aux seules fréquences positives

$$z^{+} = \int_{0}^{+\infty} Z_R \exp[2\pi j\, ft]\, df$$

D'autre part, nous montrons dans l'appendice 3 l'identité de l'expression (39) avec les autres expressions de vecteur de polarisation généralement utilisées dans la littérature.

° ° °

## 2.5. - APPLICATIONS

Dans cette section, nous indiquons quelques possibilités d'application de la notion de signal complexe associé à un signal réel à deux composantes. Nous montrons d'abord les caractéristiques du spectre du signal complexe avec des exemples de signaux artificiels. Puis nous donnons un exemple d'application au cas d'un signal naturel non stationnaire auquel on a appliqué la méthode d'analyse de la "fenêtre glissante" décrite dans la première partie de ce travail. Enfin, nous donnons aussi des exemples d'application à la correction de l'influence de la rotation des axes de mesure, telle qu'elle sera appliquée aux données du satellite GEOS.

### 2.5.1. - Signaux artificiels

Pour illustrer les caractéristiques du spectre du signal complexe associé à un signal réel à deux composantes, nous avons calculé le spectre de signaux artificiels engendrés par calculateur. Nous avons mélangé trois signaux monochromatiques de fréquences différentes: 0.5, 1.0 et 1.5 Hz, dont les polarisations sont différentes. La fréquence d'échantillonnage est choisie égale à 5,12 Hz. Nous avons calculé d'abord le spectre du signal complexe $S_{xy}(f)$, en appliquant une FFT à 512 points sur $s_{xy} = x_R + j\, y_R$ pondérée par une fonction de poids $(1-\cos(\pi t/12{,}5))$. Les spectres des composantes x et y sont calculés en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} X(f) = \frac{1}{2}\{ S_{xy}(+f) + [S_{xy}(-f)]^* \} \\ Y(f) = \frac{-j}{2}\{ S_{xy}(+f) - [S_{xy}(-f)]^* \} \end{cases}$$

i) Mélange de signaux de même ellipticité, mais dont les directions des grands axes de polarisation sont différents.

La figure 3 montre les amplitudes et la phase relative des spectres X,Y et $S_{xy}^+$ , $S_{xy}^-$. $S_{xy}^-(f)$ étant le spectre de fréquence négative de $S_{xy}(f)$, nous avons replié le spectre autour de l'origine, $S_{xy}^-(-f)$, pour des raisons de représentation. Les signaux sont la somme de trois signaux monochromatiques de même amplitude; $s = s_1 + s_2 + s_3$ dont les fréquences sont $s_1$ = 0.5 Hz, $s_2$ = 1.0 Hz, $s_3$ = 1.5 Hz. Les trois signaux ont la même ellipticité de +0.2 et tournent dans le même sens, mais les directions des grands axes sont différentes : pour $s_1$: 45°, pour $s_2$: 90°, pour $s_3$: -45°. (nous avons défini la direction de l'axe dans le domaine de -90° à +90°. Mais ils sont identiques à 180° près).

Les figures représentent successivement et de haut en bas: les spectres d'amplitude de la composante X, en trait plein, et Y, en trait pointillé: la différence de phase entre X et Y; les spectres d'amplitude de la composante $S_{xy}^+$, en trait plein, et $S_{xy}^-$ en trait pointillé; la demi-somme des phases $S_{xy}^+$ et $S_{xy}^-$.

Les amplitudes sont normalisées aux valeurs maximales de chacune des composantes x,y et $S_{xy}^+$, $S_{xy}^-$. La phase est donnée en degrés.

Le contenu de l'information dans les deux représentations X, Y et $S^+_{xy}$, $S^-_{xy}$, est identique, mais dans le cas de représentation $S_{xy}$, les caractéristiques de polarisation du signal sont plus apparentes.

Dans le cas de la représentation X, Y, les amplitudes et la différence de phase sont liées à la fois à l'ellipticité et à la direction du grand axe du signal, et pour déterminer la caractéristique de polarisation, il faut connaître simultanément l'amplitude et la phase.

Tandis que dans le cas de la représentation en termes de signal complexe, la différence d'amplitude des spectres $S^+_{xy}$ et $S^-_{xy}$, $|S^+_{xy}| - |S^-_{xy}|$, est liée uniquement à l'ellipticité, et le signe fournit directement le sens de rotation. Plus exactement, l'ellipticité est donnée par la différence d'amplitude relative, selon la relation :

$$\varepsilon = \frac{|S^+_{xy}| - |S^-_{xy}|}{|S^+_{xy}| + |S^-_{xy}|}$$

Il est très facile de voir sur les figures que les trois signaux ont même ellipticité et même sens de rotation.

L'ellipticité calculée d'après les valeurs lues sur la figure nous donne, pour $s_1$ et $s_3$ : +0.2, et pour $s_2$: +0.16 ($s_2$ est légèrement déformé par les interférences entre les signaux $s_1$ et $s_3$). On retrouve donc bien, et facilement, l'ellipticité théorique de +0.2 pour les trois signaux.

La demi-somme des phases de $S^{+}_{xy}$ et $S^{-}_{xy}$ (qui est équivalente à la demi-différence des phases de $S^{+}_{xy}$ et $(S^{-}_{xy})^{*}$ ) nous donne directement la direction du grand axe de l'ellipse. On retrouve bien sur la figure les directions des grands axes (pour $s_1$: 45°, pour $s_2$: 90° et pour $s_3$: -45°), alors qu'on ne peut pas interpréter facilement la valeur de la phase obtenue à partir des composantes orthogonales.

ii) Influence du bruit.

Nous avons pris le même signal que dans l'exemple précédent et nous y avons ajouté un bruit blanc. Le rapport signal à bruit, total, est de 20 dB, dans la bande utile du signal ($-f_e/2$ à $f_e/2$, où $f_e$ est la fréquence d'échantillonnage). On voit sur la figure 4 les déformations apportées par le bruit. On remarque surtout une fluctuation de phase importante dans la zone où il n'y a pas de signal. Dans ce cas, la représentation en terme de signaux complexes est plus agréable puisqu'on a simultanément une visualisation directe des amplitudes et de l'ellipticité; lorsque la seconde devient égale à 1 ou lorsque les premières deviennent nulles, on voit tout de suite les régions pour lesquelles la phase n'est pas significative. Toutefois la présence de bruit entache d'erreurs supplémentaires les mesures d'ellipticité. Dans le cas présent, les trois valeurs mesurées pour $s_1$, $s_2$ et $s_3$ sont respectivement 0.22, 0.12 et 0.16 alors que les valeurs théoriques étaient toutes trois égales à 0.2.

iii) Signaux de différents sens de rotation et de différentes ellipticités en présence de bruit.

Dans cet exemple (figure 5), nous avons changé les valeurs de l'ellipticité et le sens de rotation selon les signaux :

$s_1$: +0.7, $s_2$: +0.2, $s_3$: -0.3

Les amplitudes des signaux sont aussi légèrement changées :

$|s_1| = 1$, $|s_2| = 0.84$, $|s_3| = 0.86$

tandis que les directions des grands axes sont prises identiques au cas précédent: $s_1$: 45°, $s_2$: 90°, $s_3$: -45°.

Le rapport signal à bruit total est aussi égal à 20dB.

Remarquons d'abord que les spectres d'amplitude de X et Y sont peu différents de ceux obtenus précédemment, bien que les caractères de polarisation des signaux aient changé. On constate plutôt un changement dans la différence des phases de X et Y, mais il est impossible d'interpréter cette différence de façon simple: on note bien une différence importante entre la figure 4 et la figure 5 dans le cas du signal $s_3$, mais on ne sait pas s'il faut l'attribuer à un changement de l'ellipticité ou à un changement de direction du grand axe de l'ellipse (le changement du sens de rotation se remarque sur le changement de signe de la phase).

En revanche, les spectres de $S^+_{xy}$ et $S^-_{xy}$ représentent bien les différences d'ellipticité entre les signaux. On peut voir très facilement sur la figure :

pour $s_1$ : $|S^+_{xy}| \gg |S^-_{xy}|$ polarisation presque circulaire, sens de rotation direct

$s_2$ : $|S^+_{xy}| \gtrsim |S^-_{xy}|$ polarisation elliptique très allongée, sens de rotation direct

$s_3$ : $|S^+_{xy}| < |S^-_{xy}|$ polarisation elliptique sens de rotation rétrograde.

Par ailleurs, les valeurs de l'ellipticité calculées d'après la figure sont respectivement :

+0.69, +0.11, -0.33 au lieu de +0.7, +0.2, -0.3

Les directions des grands axes, données par les phases relatives de $S^+_{xy}$ et $(S^-_{xy})^*$, sont également obtenues avec la même précision que précédemment.

iV) Influence de la rotation des axes de mesure.

Dans cet exemple, nous avons pris le même signal que dans l'exemple précédent, mais sans bruit, et nous avons simulé le cas d'observation de ces signaux dans un repère en rotation, dans le sens rétrograde, à la fréquence de -0.06 Hz.

La figure 6 représente de haut en bas les spectres des composantes $\tilde{X}, \tilde{Y}$ dans le repère de mesure; les spectres des composantes $S^+_{\tilde{x}\tilde{y}}$ et $S^-_{\tilde{x}\tilde{y}}$ dans le repère de mesure et les spectres

des composantes $S^{+}_{xy}$ et $S^{-}_{xy}$ corrigés de l'influence de la rotation, c'est-à-dire replacés dans le repère fixe.

Pour les amplitudes des spectres de X et Y, l'influence de la rotation se traduit par un dédoublement des spectres et ceux-ci sont tellement déformés qu'on ne trouve aucune ressemblance avec l'exemple précédent, qui représentait le même signal (avec bruit) dans le repère fixe.

Mais pour les spectres des composantes $S^{+}_{\tilde{x}\tilde{y}}$ et $S^{-}_{\tilde{x}\tilde{y}}$, l'influence de la rotation du repère d'observation se traduit par une simple translation et la déformation de la forme du spectre ne se produit pas. Il faut noter que la translation dans deux sens $+f_s$ pour $S^{+}_{\tilde{x}\tilde{y}}$ et $-f_s$ pour $S^{-}_{\tilde{x}\tilde{y}}$ est uniquement la conséquence de la représentation adoptée qui a consisté à replier sur l'axe positif des fréquences le spectre $S^{-}_{xy}$ qui normalement devrait s'exprimer en termes de fréquences négatives. Il s'agit donc bien en fait d'une translation unique de $+f_s$.

En translatant l'origine des fréquences à $+f_s$, on peut très simplement corriger l'effet de la rotation des axes de mesure et l'on trouve en effet un spectre identique à celui obtenu sur la figure précédente (à l'exception du bruit), c'est-à-dire un spectre qui permet de reconstituer très aisément le sens de rotation, l'ellipticité et la direction des grands axes des trois signaux originaux.

On voit donc que la représentation complexe est particulièrement bien adaptée à l'étude de la polarisation des signaux lorsque les axes de mesure sont en rotation par rapport au repère "fixe".

2.5.2. - Signaux naturels

Nous donnons ici une application à la représentation temps-fréquence des propriétés de polarisation du signal. (Nous considérons surtout une application pour des signaux polarisés circulairement ou elliptiquement).

Nous adoptons pour cette analyse la méthode ordinaire de la fenêtre glissante (voir première partie) en l'appliquant au signal complexe associé à un signal réel à deux composantes. Sur la figure 7, on a représenté l'organigramme de la méthode :

Nous formons d'abord le signal complexe à partir des deux composantes orthogonales mesurées $x_R$ et $y_R$; puis nous passons dans le domaine des fréquences grâce à une FFT (Transformée de Fourier rapide); ensuite, nous appliquons la fonction de transfert du filtre sur les deux composantes de Fourier ($f > 0$ et $f < 0$) du signal complexe. Nous effectuons la FFT inverse et nous obtenons ainsi les composantes tournantes en fonction de la fréquence et du temps.

A ce stade du calcul, il est possible de choisir plusieurs représentations: soit l'on représente les signaux filtrés, gauche et droit; soit l'on calcule d'autres grandeurs intéressantes (ellipticité, direction des grands axes de l'ellipse en fonction de la fréquence et du temps) à partir des formules données dans les paragraphes prédédents.

Nous avons choisi de représenter ici la puissance totale et la puissance circulaire pour mettre en évidence les caractéristiques liées à la polarisation circulaire des signaux naturellement observés dans cette gamme de fréquence.

i) Perles de polarisation simple :

La figure 8 montre un résultat d'analyse d'une perle dans la gamme de fréquence U.B.F. . La méthode décrite ci-dessus nous fournit les puissances des deux composantes tournantes $|S^+(t,f)|^2$ et $|S^-(t,f)|^2$. Mais pour mettre en évidence le sens de rotation et la polarisation circulaire, nous considérons que la puissance polarisée circulaire est plus intéressante. C'est pourquoi nous avons choisi, sur la figure 8 de représenter :

- le spectre de puissance totale : $|S^+|^2 + |S^-|^2$

- le spectre de puissance polarisée circulairement, positif: $P_c = |S^+|^2 - |S^-|^2$ lorsque cette quantité est positive.

- le spectre de puissance polarisée circulairement, négatif: $-P_c = |S^-|^2 - |S^+|^2$ lorsque c'est cette quantité qui est positive.

La représentation en deux figures séparées selon le signe de $P_c$ n'a pas un caractère fondamental; elle est imposée par le fait que les représentations en trois dimensions qui font appel à un noircissement ne permettent que la représentation de grandeurs positives ou nulles et que l'on ne veut surtout pas perdre l'information sur le sens de rotation.

Nous n'avons pas représenté la puissance polarisée linéairement pour la raison suivante: puisque la méthode utilisée est une extension directe de la notion d'analyse instantanée, il n'y a aucune intégration à l'exception de celle qui est contenue

implicitement dans le processus de filtrage. La puissance polarisée et la puissance totale sont donc identiques (voir § 2.4.1). Ce qui veut dire que l'on n'a pas besoin de l'information de puissance polarisée linéairement, le module de celle-ci se déduisant simplement de la puissance totale et de la puissance polarisée circulairement

$$|P_l| = [T^2 - P_c^2]^{1/2}$$

Le problème serait différent si l'on s'intéressait à la direction des grands axes de polarisation qui s'exprime directement à l'aide de l'argument de $P_l$ (équation 37').

Par ailleurs, la méthode de filtrage utilisée prend implicitement pour hypothèse que le signal et sa polarisation sont stationnaires dans l'intervalle de temps correspondant à la réponse du filtre. C'est-à-dire que la puissance polarisée ainsi calculée ne contient pas celle des signaux dont le sens de rotation n'est pas stable dans le dit intervalle de temps. Ceci est, dans la plupart des cas, favorable à l'élimination du bruit dans la recherche des polarisations circulaires.

Sur la figure 8, il est clair que les perles sont tout à fait polarisées à gauche (les valeurs de $P_c > 0$ correspondent dans le cas actuel au mode gauche). D'autre part, les phénomènes à haute fréquence ($f \sim 0.9$ Hz) n'apparaissent ni sur la représentation $P_c > 0$ ni sur la représentation $P_c < 0$ (ou seulement très faiblement), alors que la structure est très nette sur la représentation de la puissance totale. Ceci veut dire que cette partie du phénomène présente une polarisation linéaire très marquée.

Il est possible de représenter également par un noircissement la valeur de l'ellipticité. C'est ce que nous avons fait sur la figure 9 où sont représentés indépendamment les signaux d'ellipticité positive (polarisation gauche) et négative (polarisation droite). On remarque que la perle étudiée a une polarisation gauche, très fortement circulaire, les valeurs mesurées oscillant entre +0.5 et +1.

Pour faciliter la visualisation, nous avons retiré (en les remplaçant par du blanc) les signaux dont le module de l'ellipticité était inférieur à 0.2. En effet le bruit étant principalement de polarisation linéaire, l'ensemble du plan f-t se trouve obscurci par le bruit. De ce fait, la partie polarisée quasi-linéairement au voisinage de $f \sim 0.9$ Hz n'apparaît pas sur la figure 9.

ii) Perles à polarisation multiple

Nous montrons ici (figure 10) le même type de phénomène, mais un peu plus compliqué que dans l'exemple précédent.

La figure du haut représente la puissance totale du signal complexe, c'est-à-dire la somme des carrés des transformées de Fourier des signaux orthogonaux originaux, $X^2 + Y^2$. On y remarque beaucoup de paquets d'ondes arrivant simultanément. L'analyse selon les deux polarisations circulaires opposées ($P_c > 0$ et $P_c < 0$) met en évidence les différences du sens de rotation selon la gamme de fréquence: gauche pour les fréquences voisines de 1.3 Hz, droite pour les fréquences voisines de 1.15 et 1.45 Hz.

Il est clair que seule notre méthode d'analyse, qui élimine les effets dus aux changements possibles des directions des grands axes de polarisation permettra de donner une signification plus précise aux études faites sur la polarisation des émissions UBF ( Gendrin et al. (1966 a,b); Gokhberg et al.(1974); Glangeaud et Lacoume (1975) ).

2.5.3. - Signaux reçus à bord du satellite GEOS. (simulation).

Nous nous intéressons aux phénomènes magnétosphériques UBF qui seront détectés à bord du satellite géostationnaire européen GEOS, qui sera lancé en Avril 1977.

Un des problèmes posés par ce satellite pour la mesure des ondes d'Ultra Basse Fréquence ($\sim$ 0.05-5 Hz) est la rotation des axes de mesure. GEOS sera stabilisé par rotation, la vitesse de rotation nominale étant de 10 tours par minute ($f_s \sim$ 0.167 Hz). Cette fréquence de rotation est située en plein milieu de la gamme de fréquence des phénomènes UBF qui nous intéressent. Donc les composantes de l'onde mesurées dans le plan de rotation du satellite seront complètement déformées. De plus, le capteur magnétique utilisé est du type inductif dans cette gamme de fréquence. Et les signaux reçus à travers la chaîne de mesure seront déjà très déformés par la fonction de transfert de l'antenne: la restitution des signaux dans le repère fixe devient alors quasi impossible sans erreurs importantes, (Kodera, 1973; Kodera et Perraut, 1975).

Un autre problème lié à cette expérience est celui de

la grande quantité de données à analyser: celles-ci sont envoyées continuellement au sol pendant deux ans avec une fréquence d'échantillonnage de 23 Hz. Il faut donc commencer par une sélection des données. Cette sélection doit se faire à partir d'une analyse préliminaire systématique presque en temps réel, c'est-à-dire que les données seront traitées grossièrement au fur et à mesure qu'on les recevra. Sur la base des résultats de ce pré-traitement, on choisira les données à conserver pour analyse fine ultérieure.

Pour s'adapter au mieux à ces contraintes, on a choisi d'utiliser le signal complexe. Nous montrons ici la simulation de l'analyse préliminaire. (Pour plus de détail sur ce traitement voir Hunter, 1974).

A) Correction de l'influence de la rotation et de la fonction de transfert

L'influence de la rotation des axes et de la fonction de transfert des appareils de mesure doit être corrigée avant de commencer l'analyse. Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 2.2.2., pour le signal complexe associé à un signal réel à deux composantes, l'influence de la rotation se réduit à une simple translation de fréquence de la quantité $f_s$. Donc la correction de la rotation se fait simplement avec la translation d'origine de fréquence sur le spectre de signal calculé (⊗):

(⊗) On suppose que le satellite tourne dans le sens direct par rapport à la direction des antennes x et y. Sinon c'est une translation de $-f_s$ qu'il faut effectuer.

$$S_{xy}(f) = \tilde{S}_{xy}(f - f_s)$$

$\tilde{S}(f)$ : spectre du signal complexe obtenu à partir des deux composantes mesurées dans le repère en rotation.

$S(f)$ : spectre complexe dans le repère fixe.

Nous corrigeons également sur le spectre les effets dus à la fonction de transfert. Celle-ci risque de fausser la mesure de polarisation étant donné l'atténuation différente introduite sur les fréquences positive et négative dans le repère fixe (car dans le repère mobile il y a une translation de fréquence qui porte, en valeur absolue, la fréquence d'un même signal à des valeurs apparentes différentes selon que la polarisation est de même sens que la rotation de l'engin, ou de sens contraire).

Nous montrons ici un essai de ces corrections effectué avec des méthodes analogiques (Kodera, 1974).

Les capteurs magnétiques sont posés sur une table tournante qui tourne avec une fréquence de 0.167 Hz. Le signal est injecté par une paire de bobines de Helmholz (Karczewski et al., 1976), (ceci revient à injecter un signal polarisé linéairement). Le signal que nous avons injecté est un phénomène du type perles, enregistré à Kerguelen, que nous avons relu sur une bande magnétique et que nous avons amplifié. Il a une fréquence assez élevée ($\sim$ 0.7 Hz) par rapport à la fréquence de rotation de la table tournante.

Les résultats sont analysés en fréquence à l'aide d'un analyseur analogique SAICOR. (Pour le détail des caractéristiques de l'analyseur SAICOR, voir par exemple Wehrlin, 1974). La figure 11 montre les résultats de l'analyse sur les signaux injectés et reçus.

La figure 11-a représente les spectres des signaux. En haut, sont les spectres d'amplitude du signal reçu dans le repère tournant (les composantes x et y, que nous dénotons $B_x$ et $B_y$). Les traits pointillés correspondent aux signaux effectivement reçus et les traits pleins aux signaux corrigés de l'influence de la fonction de transfert de l'antenne. Le spectre du bas est celui du signal injecté (repère fixe).

Nous remarquons tout de suite que même lorsque la correction de la fonction de transfert de l'antenne est faite, les spectres des signaux reçus sont déformés par la rotation du repère (sans compter les bruits causés par la vibration de la table tournante). La figure 11-b représente en haut les formes d'onde du signal original et du signal $B_X$, avant et après correction de l'influence de la fonction de transfert de l'antenne. Même après correction de la fonction de transfert de l'antenne on remarque la forte déformation de la forme d'onde due à la rotation.

Pour faire mieux ressortir le signal du bruit, nous avons effectué un filtrage sur les deux signaux (partie basse de la figure 11-b). Nous remarquons l'influence de la rotation qui conduit à une déformation très nette de l'enveloppe du signal.

Pour réduire la correction de l'effet de rotation à une simple translation de fréquence, nous avons formé deux signaux

réels à deux composantes $B^{+}_{xy}$ et $B^{-}_{xy}$ avec les deux composantes orthogonales $B_X$ et $B_Y$ mesurées dans le repère tournant comme :

(Pour plus de détails, voir l'Appendice 2)

$$\begin{cases} B^{+}_{XY} = B_X - \bar{B}_Y \\ B^{-}_{XY} = B_X + \bar{B}_Y \end{cases}$$

où le symbole $\bar{B}$ dénote le signal en quadrature fabriqué par un filtre de quadrature à partir du signal B.

Sur la figure 12-a nous avons représenté les spectres de ces deux signaux réels à deux composantes, corrigés de l'influence de la fonction de transfert de l'antenne. Le spectre du signal original injecté dans le repère fixe est également représenté en bas de la figure 12-a.

En translatant les spectres de $B^{+}_{XY}$ et $B^{-}_{XY}$ de la quantité $f_s$, nous retrouvons le spectre original, bien que le spectre de $B^{-}_{XY}$ soit déformé par un bruit très important aux très basses fréquences.

Sur la figure 12-b les formes d'onde de ces signaux sont représentées. Ils sont tous les 3 filtrés, pour mieux faire sortir le signal du bruit. Bien que $B^{-}_{BY}$ soit très déformé par le bruit, on retrouve l'enveloppe originale du signal. On remarque aussi l'influence très nette de la rotation des axes, qui se traduit par un accroissement très caractéristique des fréquences pour $B^{-}_{XY}$ (et une diminution pour $B^{+}_{XY}$).

B) Visualisation de l'analyse préliminaire effectuée sur les signaux UBF de GEOS.

L'analyse préliminaire consiste à calculer la transformée de Fourier de chaque séquence de signaux, toutes les 22 secondes environ et (après correction de la fonction de transfert et de la rotation des axes) à représenter la puissance des composantes tournantes (⊗) sous forme de sonagramme digital. (De plus les puissances moyennes calculées à partir des spectres sont également représentées par des courbes, dont nous ne parlerons pas ici.)

Ainsi que nous l'avons montré dans le cas des signaux artificiels, il est facile de calculer les composantes orthogonales à partir des composantes tournantes. Mais, le spectre de composante tournante sera plus intéressant à représenter, puisqu'il représente directement la propriété de la polarisation du signal qui permettra de déterminer le mode de l'onde observée. Il faut tout de même noter que ceci n'est possible que dans la zone où la fonction de transfert est convenablement corrigée.

---

(⊗) Nous avons choisi de représenter la puissance de chacune des composantes tournantes, ce qui est différent des exemples précédents où l'on représentait la puissance polarisée circulairement. Les raisons pour lesquelles nous avons été amenés à faire ce choix tiennent à la grande quantité des données à analyser. Avec la représentation des composantes tournantes, on n'a besoin que de deux spectrogrammes pour couvrir toutes les sortes de polarisation; dans l'autre représentation, il en faut 3 : $P_c > 0$, $P_c < 0$, $P_l$.

Nous montrons sur la figure 13, une simulation de la visualisation des résultats. Nous avons utilisé un signal enregistré à Heard, sur deux composantes orthogonales pour faire cette simulation. Les deux figures du haut représentant les spectres du type sonagramme, calculés avec le signal complexe, décomposé selon les bases à fréquence positive et négative, $B^+$ et $B^-$. Le bas de la figure est censé représenter le spectre de la composante Z parallèle à l'axe de l'engin. Mais en fait, pour cette simulation, il s'agit uniquement de la composante originale $B_X$ du signal. Les 512 spectres correspondant à 512 intervalles de 20 secondes sont calculés et visualisés.

La courbe en bas de chaque spectre représente les valeurs de normalisations qui ont été utilisées dans chaque cas pour s'adapter à la dynamique de visualisation. (Cette procédure de dynamique adaptative (Gendrin et al., 1976) est liée à la contrainte du traitement en temps réel et à la limitation de la dynamique de visualisation). Les premières parties des spectres représentent une calibration, et ne sont pas significatives ici. Dans la zone où il y a des phénomènes, on remarquera sur les courbes de niveau et sur le bruit de fond que $B^-$ a plus de puissance. Ceci montre bien que les phénomènes ont un mode gauche.

D'autre part le phénomène qui se produit à la fin des perles a même puissance dans deux spectres $B^+$ et $B^-$ c'est-à-dire qu'il a une polarisation linéaire.

Ainsi par cette représentation on peut connaître la polarisation du signal aussi bien que la concentration d'énergie dans le domaine temps-fréquence.

° ° °

## 2.6. - CONCLUSION

Pour analyser les signaux de polarisation plane, l'introduction du signal complexe associé au signal réel à deux composantes est très utile, surtout dans le cas de l'analyse numérique et surtout lorsque l'on désire simultanément une analyse en fréquence. On peut traiter deux composantes avec la même facilité qu'une seule composante, d'autant plus que l'algorithme de la FFT est en principe établi pour les signaux complexes et l'on peut donc obtenir simplement le spectre des deux composantes avec une seule FFT.

Le spectre du signal complexe associé à un signal réel à deux composantes est directement lié à la polarisation du signal dans le plan. On peut, en une seule opération, obtenir aussi bien les caractéristiques fréquentielles du signal que ses caractéristiques de polarisation (sens de rotation, ellipticité, direction des axes de polarisation). Ceci présente un grand avantage, tant du point de vue de l'analyse du signal que du point de vue de la représentation des résultats de celle-ci.

L'utilisation du signal complexe associé présente deux autres avantages. Premièrement, lorsque l'on veut étudier la polarisation des signaux dans le domaine temps-fréquence, et qu'on utilise la méthode de la fenêtre glissante on n'a pas besoin de l'arsenal très lourd des opérations sur les fonctions trigonométriques à chaque pas. Deuxièmement et surtout, lorsqu'on a affaire à des signaux détectés dans un repère tournant, il n'y a pratiquement aucun calcul à faire pour corriger l'effet de la

rotation: une simple translation de l'origine des fréquences est à la fois un procédé efficace et élégant.

Le défaut des composantes tournantes est qu'elles ne sont pas spatialement orthogonales et qu'il est donc difficile d'étendre ce mode d'analyse à un signal à trois dimensions. Nous considérons cependant que le type d'analyse que nous avons décrit peut être très utile après avoir fait le changement de coordonnées dans le plan principal de polarisation. Il existe plusieurs méthodes pour la détermination de la matrice de changement de coordonnées (voir par exemple Arthur et al. 1975) mais ceci suppose que ce plan est stable dans le temps et ne dépend pas de la fréquence, conditions assez difficiles à réaliser simultanément dans le cas de signaux naturels.

°
° °

## 2.7.- APPENDICES

### 2.7.1.- Ellipticité et différence de phase.

#### a) Polarisation en base linéaire et en base circulaire

Nous montrons ici que la définition des paramètres de polarisation effectuée à partir de deux composantes circulaires (équation 21) est identique à la définition usuelle fondée sur les composantes orthogonales du signal original.

Dans le cas d'un signal représenté par ses deux composantes orthogonales, on écrit :

$$(A\text{-}1)\quad \begin{cases} x_R = B_1 \cos(2\pi ft + \phi_1) \\ y_R = B_2 \cos(2\pi ft + \phi_2) \end{cases}$$

$$B_1, B_2 \geq 0$$

Les paramètres de polarisation sont exprimés avec les amplitudes et la différence des phases comme :

$$(A\text{-}2.1)\qquad \sin 2\beta = \frac{2B_1B_2}{B_1^2 + B_2^2} \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$(A\text{-}2.2)\qquad \operatorname{tg}\ 2\theta = \frac{2B_1B_2}{B_1^2 - B_2^2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$\tan\beta$ représente le rapport du petit et du grand axe de l'ellipse de polarisation et est égal à l'ellipticité $\varepsilon$. Le signe de $\beta$ donne

le sens de rotation, ($\beta > 0$ sens direct, $\beta < 0$ sens rétrograde). $\theta$ est l'angle entre l'axe x et le grand axe de l'ellipse.

Maintenant vérifions que les expressions A-2 sont identiques aux expression de l'équation (21).

Formons le signal complexe associé au signal original dont les composantes sont données par l'équation A-1 :

$$(A\text{-}3) \qquad s_{xy}(t) = B_1 \cos(2\pi ft + \psi_1) + j\, B_2 \cos(2\pi ft + \psi_2)$$

que l'on peut écrire :

$$(A\text{-}3') \qquad s_{xy}(t) = A_1\, e^{j(2\pi ft + \phi_1)} + A_2\, e^{j[2\pi(-f)t + \phi_2]}$$

$$A_1,\ A_2 \geqslant 0$$

avec les conditions :

$$(A\text{-}4) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}\left| B_1^{\,2} + B_2^{\,2} + 2B_1B_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) \right|^{1/2} \\ A_2 = \frac{1}{2}\left| B_1^{\,2} + B_2^{\,2} - 2B_1B_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) \right|^{1/2} \\ \phi_1 = \mathrm{Arctg}\left( \dfrac{B_1 \sin\psi_1 - B_2 \cos\psi_2}{B_1 \cos\psi_1 + B_2 \sin\psi_2} \right) \\ \phi_2 = -\mathrm{Arctg}\left( \dfrac{B_1 \sin\psi_1 - B_2 \cos\psi_2}{B_1 \cos\psi_1 - B_2 \sin\psi_2} \right) \end{cases}$$

Calculons l'angle entre l'axe x et le grand axe de l'ellipse. D'après la dernière des équations (21), $\theta$ est égal

à la demi-somme des arguments de $s^+$ et de $s^-$. Donc, en utilisant A-3', on voit que :

$$\theta = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

Donc : $\quad tg\ 2\theta = tg\ (\phi_1 + \phi_2) = \dfrac{tg\ \phi_1 + tg\ \phi_2}{1 + tg\ \phi_1 \cdot tg\ \phi_2}$

et, en se servant de A-4, on trouve bien :

$$\text{(A-5)} \qquad tg\ 2\theta = \frac{2B_1B_2}{B_1^{\,2} - B_2^{\,2}} \cos(\psi_1 - \psi_2)$$

qui n'est autre que l'équation A-2.2.

Maintenant, au lieu de calculer l'ellipticité, calculons le rapport entre la puissance polarisée circulairement et la puissance totale, $\hat{\varepsilon}$ :

$$\text{(A-6)} \qquad \hat{\varepsilon} = \frac{A_1^{\,2} - A_2^{\,2}}{A_1^{\,2} + A_2^{\,2}}$$

et montrons que l'équation A-6 est identique à l'équation A-2.1. L'équation A-6, peut s'écrire, avec l'aide de A-4, sous la forme :

$$\text{(A-7)} \qquad \hat{\varepsilon} = \frac{2B_1B_2}{B_1^{\,2} + B_2^{\,2}} \sin(\psi_1 - \psi_2)$$

D'autre part, l'ellipticité $\varepsilon$ est donnée par la troisième équation du système (21) qui, avec l'aide de A-3', s'écrit :

$$(21) \qquad \varepsilon = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

On a donc :

$$(A\text{-}8) \qquad \hat{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}$$

Si l'on exprime, comme dans l'équation A-2, l'ellipticité en terme d'angle ($\varepsilon = tg\ \beta$), l'équation A-8 devient :

$$(A\text{-}9) \qquad \hat{\varepsilon} = \frac{2tg\ \beta}{1 + tg^2\beta} = \sin 2\beta$$

En combinant les équations A-7 et A-9, on retrouve bien l'équation A-2.1

b) Signification exacte de la différence de phase entre deux composantes orthogonales

Dans le cas général, l'information de phase est donnée séparément de l'amplitude pour caractériser la polarisation. Or comme on le voit sur l'équation A-2, l'ellipticité dépend aussi bien des amplitudes que de la phase relative, dans le cas de la représentation à l'aide des composantes orthogonales. Pour faire intervenir uniquement le terme de phase dans l'ellipticité, il faut ne considérer que le signe de celle-ci :

(A-2') $\quad \text{sign}\ (\varepsilon) = \text{sign}\ \{ \sin(\psi_1 - \psi_2) \}$

Autrement dit, avec la seule information de phase, on ne peut déterminer avec certitude que le sens de la rotation. Comme il s'agit d'une variable importante, on s'explique bien l'intérêt des résultats obtenus dans l'étude des émissions du type Pc-3, Pc-4. Mais si l'on veut étudier l'ellipticité ou la direction des axes de l'ellipse, ou même tester la validité de l'information sur le sens de rotation, il faut alors recourir simultanément à l'information sur l'amplitude des composantes orthogonales.

A titre d'exemple, étudions la dépendance de la différence de phase vis-à-vis de la direction des axes de mesure, et pour estimer les erreurs ainsi introduites, limitons-nous au cas où $\psi_1 - \psi_2 = 90°$. Intuitivement, on dira qu'il s'agit d'un signal assez fortement polarisé, beaucoup plus en tout cas qu'un signal pour lequel on aurait $\psi_1 - \psi_2 = 25°$ ou $\psi_1 - \psi_2 = 155°$. Eh bien, selon l'orientation des axes de mesure par rapport à la direction du grand axe de l'ellipse, nous allons voir que la différence des phases entre les deux composantes orthogonales $\psi_1 - \psi_2$ peut être plus petite que 25°, ou plus grande que 155°.

Dans le cas où nous mesurons le signal dans le système de coordonnées des axes principaux de la polarisation, le déphasage entre les deux composantes orthogonales est bien entendu $\pm\pi/2$ quelle que soit l'ellipticité. Considérons le cas d'un signal polarisé dans le sens direct. Ses composantes s'écrivent :

$$(A\text{-}22)\quad \begin{cases} x_R = a\cos(2\pi ft + \phi) \\ y_R = b\sin(2\pi ft + \phi) \end{cases}$$

et l'on a $\psi_1 - \psi_2 = 90° \pm 180°$

Si l'on mesure dans le plan principal mais dans un autre système d'axe X',Y' faisant l'angle $-\theta$ avec les axes X,Y, le même signal apparaît comme :

$$(A\text{-}23)\quad \begin{cases} x'_R = a\cos\theta \,.\, \cos(2\pi ft + \phi) - b\sin\theta \,.\, \sin(2\pi ft + \phi) \\ y'_R = a\sin\theta \,.\, \cos(2\pi ft + \phi) + b\cos\theta \,.\, \sin(2\pi ft + \phi) \end{cases}$$

La différence de phase entre $x'_R$ et $y'_R$, $\Delta\Phi$, est fonction de l'angle $\theta$, et du rapport entre a et b :

$$(A\text{-}24)\quad \Delta\Phi = \text{Arctg}\left(\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\right)$$

Calculons de combien $\Delta\Phi$ varie avec $\theta$.

La dérivée de $\Delta\Phi$ par rapport à $\theta$ est :

$$(A\text{-}25)\quad \frac{d\Delta\Phi}{d\theta} = ab\left\{\frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} - \frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\right\}$$

$\Delta\Phi$ prend les valeurs maximales ou minimales lorsque $d(\Delta\Phi)/d\theta = 0$. Cette condition est obtenue pour :

$$(a^2 - b^2)\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

Si l'on excepte le cas de la polarisation circulaire, a est différent de b et $\Delta\Phi$ prend les valeurs maximales ou minimales lorsque $\cos^2\theta = \sin^2\theta$ c'est-à-dire lorsque $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi$ avec n entier. En reportant dans (A-24), on voit que $\Delta\Phi$ peut prendre des valeurs comprises entre :

(A-26) $$2\beta \leq \Delta\Phi \leq \pi - 2\beta$$

avec $\beta = \text{Arctg}(b/a)$. Par exemple, pour une ellipticité de 0.2, $\Delta\Phi$ varie énormément avec l'angle des axes de mesure, $\theta$ :

(A-27) $$23° \leq \Delta\Phi \leq 157°$$

Dans le cas de l'utilisation des composantes orthogonales, il est donc indispensable de tenir compte de l'information d'amplitude et d'utiliser l'équation A-2.1. pour avoir une idée valable de l'ellipticité. Dans le cas de la décomposition tournante, l'information d'amplitude seule suffit pour déterminer le sens de la rotation et l'ellipticité et cette information ne dépend pas du tout de l'orientation des axes de mesure.

### 2.7.2.- Signal analytique et composantes tournantes

La notion de signal analytique a été introduite par J. VILLE (1948) pour un signal réel. Nous discutons ici cette notion que l'on peut facilement étendre à un signal complexe et nous montrons que les composantes tournantes $s^+_{xy}$ et $s^-_{xy}$ définies au paragraphe 2.3. ne sont pas autre chose que les deux signaux analytiques que l'on peut associer au signal complexe $s_{xy}$.

Considérons d'abord le cas simple d'un signal réel monochromatique $x(t) = \cos(2\pi ft)$. GABOR (1946) avait montré qu'un tel signal pouvait être représenté de différentes façons en introduisant l'exponentielle complexe, soit d'une façon symétrique en écrivant :

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}\{\exp(2\pi jft) + \exp(-2\pi jft)\} \tag{A-28}$$

soit d'une façon dissymétrique, qui laisse deux possibilités :

$$\left\{\begin{array}{c} \cos(2\pi ft) = \mathrm{Re}\{\exp(2\pi jft)\} \\ \text{ou} \\ \cos(2\pi ft) = \mathrm{Re}\{\exp(-2\pi jft)\} \end{array}\right. \tag{A-29}$$

Lorsque t est réel, ces trois formulations sont identiques, mais lorsque t est considéré comme une variable complexe $t = t_R + jt_I$ et que f est positif alors si $t_I \to +\infty$ , $|\exp(2\pi jft)| \to 0$, tandis que $|\exp(-2\pi jft)| \to \infty$. Donc, en prenant comme convention de convergence celle qui correspond au demi-plan complexe supérieur, VILLE (1948) avait été contraint de choisir la première des formes (A-28) comme signal analytique associé à $\cos(2\pi ft)$. Il avait donc été conduit à définir <u>le</u> signal analytique $x_a(t)$ associé à un signal réel $x(t)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x_a(t) = x(t) + j\bar{x}(t) \\ \text{avec} \\ \bar{x}(t) = \mathrm{V.P.}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t')}{t-t'}\,dt'\right\} = \mathcal{H}i\{x(t)\} \end{array}\right. \tag{A-30}$$

où $\mathcal{H}i\{x\}$ dénote la transformée de Hilbert de la fonction x.

Il est toutefois clair que si l'on considère que la fréquence peut prendre des valeurs négatives aussi bien que positives, $|\exp(-2\pi jft)|$ aussi tend vers zéro lorsque $t_I \to +\infty$. C'est pourquoi nous considérons les deux expressions $\exp(2\pi jft)$ et $\exp(-2\pi jft)$ comme des signaux analytiques possibles associés au signal réel $\cos(2\pi ft)$, la première correspondant aux fréquences positives, la seconde aux fréquences négatives. Autrement dit nous introduisons non seulement le signal $x_a(t)$ défini par (A-30) mais également sa quantité conjuguée

$$x_a^*(t) = x(t) - j\,\bar{x}\,(t)$$

et, pour établir le rapprochement avec les notations du paragraphe 2.3, nous écrivons :

$$\text{(A-31)} \qquad \begin{aligned} x^+ &= x_a/2 \\ x^- &= x_a^*/2 \end{aligned}$$

de sorte que nous pouvons adopter le formalisme (A-28) et écrire :

$$\text{(A-32)} \qquad x_R = x^+ + x^-$$

avec

$$\text{(A-33)} \quad \begin{cases} x^+ = \frac{1}{2}\{x_R + j\,\bar{x}_R\} \\ x^- = \frac{1}{2}\{x_R - j\,\bar{x}_R\} \\ \bar{x}_R = \mathcal{H}i\{x_R\} \end{cases}$$

Ce formalisme (A-32), (A-33) peut se généraliser au cas du signal complexe associé à un signal réel à deux composantes :

$$\text{(A-34)} \quad \begin{cases} s_{xy} = x_R + j\, y_R \\ \quad = s_{xy}^{+} + s_{xy}^{-} \end{cases}$$

avec

$$\text{(A-35)} \quad \begin{cases} s_{xy}^{+} = x^{+} + j\, y^{+} \\ s_{xy}^{-} = x^{-} + j\, y^{-} \end{cases}$$

$x^+$, $y^+$, $x^-$, $y^-$ étant définis à partir des signaux réels originaux $x_R$ et $y_R$ comme indiqué par les équations (A-33).

Nous allons maintenant montrer que les deux signaux analytiques $s_{xy}^{+}$ et $s_{xy}^{-}$ que nous venons de définir sont identiques aux composantes tournantes introduites par les équations (23). En effet, d'après l'équation (23), $s_{xy}^{+}$ est défini comme :

$$s_{xy}^{+}(t) = \int_{o}^{+\infty} S_{xy}(f) \,.\, \exp(2\pi j f t)\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left\{ S_{xy}(f) + j \cdot \left[ -j \cdot \mathrm{sign}(f) \,.\, S_{xy}(f) \right] \right\} \exp(2\pi j f t)\, df$$

avec sign(f) = 1 pour f > 0, = -1 pour f < 0.

Comme la transformée de -j·sign(f) est $1/\pi t$, on peut écrire :

$$s_{xy}^{+}(t) = \frac{1}{2}\left\{ s_{xy}(t) + j\ (\frac{1}{\pi t}) * s_{xy}(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ s_{xy}(t) + j \cdot \frac{1}{\pi} \int \frac{s_{xy}(t')}{t - t'}\, dt' \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ x_R + j\, y_R + j\, (\bar{x}_R + j\, \bar{y}_R) \right\}$$

$$= x^{+} + j\, y^{+}$$

$*$ : convolution

et l'on retrouve bien la première équation (A-35). On pourrait faire de même pour $s_{xy}^{-}$.

Les deux composantes tournantes $s_{xy}^{+}$ et $s_{xy}^{-}$ introduites au paragraphe 2.3 ne sont donc rien d'autre que les deux signaux analytiques que l'on peut associer au signal complexe $s_{xy}$ formé à partir des deux composantes orthogonales du signal réel.

Les relations entre les composantes tournantes et les deux signaux analytiques sont donc obtenues avec les équations (A-31) et (A-35).

Dans le domaine du temps :

$$
(A\text{-}36)\quad
\begin{cases}
s^{+}_{yx}(t) = \frac{1}{2}[x_a(t) + j\, y_a(t)] \\
s^{-}_{xy}(t) = \frac{1}{2}[x_a^{*}(t) + j\, y_a^{*}(t)] \\
x_a(t) = s^{+}_{xy}(t) + [s^{-}_{xy}(t)]^{*} \\
y_a(t) = -j\{s^{+}_{xy}(t) - [s^{-}_{xy}(t)]^{*}\}
\end{cases}
$$

Les relations similaires sont obtenues dans le domaine des fréquences par la transformation de Fourier de l'équation (A-36).

$$
(A\text{-}37)\quad
\begin{cases}
S^{+}_{xy}(f) = \frac{1}{2}\,[X_a(f) + j\, Y_a(f)] \\
S^{-}_{xy}(-f) = \frac{1}{2}\,[X_a^{*}(f) + j\, Y_a^{*}(f)] \\
X_a(f) = S^{+}_{xy}(f) + [S^{-}_{xy}(-f)]^{*} \\
Y_a(f) = -j\left\{S^{+}_{xy}(f) - [S^{-}_{xy}(-f)]^{*}\right\}
\end{cases}
$$

Il est intéressant de noter que la définition que nous avons donnée conserve l'énergie du signal alors qu'à celle de VILLE correspond une énergie double. En effet, si l'on écrit :

$$
(A\text{-}38)\qquad x_R = \mathrm{Re}\,\{x_a\}
$$

l'énergie contenue dans le signal z :

$$(A\text{-}39) \qquad \int x_a \, x_a^* \, dt = \int [\, x_R \, x_R^* + \bar{x}_R \, \bar{x}_R^* \,] \, dt = 2 \int x_R \, x_R^* \, dt = 2 \, E_o$$

$E_o$ caractérisant l'énergie du signal donné. Alors que si l'on écrit :

$$(A\text{-}40) \qquad x_R = \frac{1}{2} \{ x_a + x_a^* \}$$

il est évident que l'énergie contenue dans $\frac{1}{2} (x_a + x_a^*)$ est égale à celle qui est contenue dans $x_R$.

- Transposition à l'étude analogique des signaux réels à deux composantes.

Notre but principal étant l'analyse numérique des signaux, l'utilisation des quantités complexes $s_{xy}$, $s_{xy}^+$, $s_{xy}^-$ est d'un emploi logique et commode. Il est cependant utile de donner les notations équivalentes pour des signaux réels dans le cas de l'utilisation de méthodes analogiques.

Les équations (A-35) s'écrivent, en utilisant les signaux originaux $x_R$ $y_R$ et leurs signaux en quadrature :

$$(A\text{-}41) \quad \begin{cases} s_{xy}^+ = \frac{1}{2} \left\{ (x_R - \bar{y}_R) + j \, (\bar{x}_R + y_R) \right\} \\ s_{xy}^- = \frac{1}{2} \left\{ (x_R + \bar{y}_R) - j \, (\bar{x}_R - y_R) \right\} \end{cases}$$

Or, deux transformations de Hilbert consécutives redonnent la fonction de départ, changée de signe :

(A-42) $\quad \bar{x}_R = \mathcal{H}i\{x_R\} \Rightarrow \mathcal{H}i\{\bar{x}_R\} = -x_R$

On vérifie alors aisément que (A-41) est équivalent à :

(A-43)
$$\begin{cases} s^+_{xy} = \frac{1}{2}\left[r^+_{xy} + j\,\overline{r^+_{xy}}\right] \\ s^-_{xy} = \frac{1}{2}\left[r^-_{xy} - j\,\overline{r^-_{xy}}\right] \end{cases}$$

avec :

(A-44) $\quad r^+_{xy} = x_R - \overline{y_R}$

(A-45) $\quad r^-_{xy} = x_R + \overline{y_R}$

On voit que les parties imaginaires de $s^+$ et $s^-$ sont les transformées de Hilbert (c'est-à-dire le signal en quadrature) de leur partie réelle. Autrement dit $s^+$ et $s^-$ sont les signaux analytiques associés à $r^+$ et $r^-$. Mais $s^+$, est, au facteur 1/2 près, le signal analytique de première forme ($x \to x_a$) au sens original de VILLE, associé à $r^+$, alors que $s^-$ est le signal analytique de deuxième forme ($x \to x_a$) associé à $r^-$. Et les spectres $R^+_{xy}(f)$ de $r^+_{xy}(t)$, et $R^-_{xy}(t)$ de $r^-_{xy}(t)$ sont identiques aux spectres de $s^+_{xy}(t)$ et de $s^-_{xy}(t)$ pour les fréquences positive et négative respectivement :

(A-46) $\quad R^+_{xy}(f) = S^+_{xy}(f) \qquad f > 0$

(A-47) $\quad R^-_{xy}(f) = S^-_{xy}(f) \qquad f < 0$

Donc $r^+_{xy}$ et $r^-_{xy}$ ont les mêmes propriétés que $s^+_{xy}$ et $s^-_{xy}$ sauf qu'il s'agit de signaux réels. On pourrait donc faire la même analyse que celle décrite dans cette deuxième partie de notre travail en utilisant les deux signaux réels $r^+$ et $r^-$ construits à partir des deux composantes réelles x et y du signal original et définis par les équations (A-44) et (A-45). Ces signaux réels sont obtenus de façon analogique très aisément en utilisant un filtre de quadrature qui est une très bonne approximation de l'opérateur de Hilbert (Berthomier, 1975; Riguet, 1974). On peut alors en faire l'analyse en fréquence à l'aide d'appareil annalogique de type Sonagraph ou Spectran pour mettre en évidence la polarisation du signal non-stationnaire. D'autres auteurs (voir en particulier Budden, 1964) ont proposé d'utiliser le signal en quadrature pour déduire les propriétés de l'ellipse de polarisation (formation de la somme $a^2 + b^2$ et du produit 2 ab), mais on ne peut plus alors, faire d'analyse spectrale.

### 2.7.3. - Autres expressions du vecteur de polarisation

Nous montrons ici que la définition que nous avons introduite du vecteur de polarisation $\vec{P}$ (équation 39) est identique à celle donnée par d'autres auteurs.

a) Vecteur de polarisation en fonction du temps

Dans le cas d'un signal à bande étroite, Shawhan (1970) et Mc Pherron (1971) définissent $\vec{P}(t)$ comme le produit vectoriel du signal $\vec{V}(t)$ par le signal retardé d'un quart de période

$\vec{V}(t-\frac{T}{4})$, c'est-à-dire en quadrature retard par rapport à $\vec{S}(t)$.

(A-48) $$\vec{P}(t) = \{\vec{V}(t-T/4) \wedge \vec{V}(t)\}$$

L'équation A-48 s'écrit plus généralement comme :

(A-49) $$\vec{P}(t) = \{\vec{\overline{V}}(t) \wedge \vec{V}(t)\}$$

avec

(A-50) $$\begin{cases} \vec{V} = (x_R, y_R, z_r) \\ \vec{\overline{V}} = (\overline{x_R}, \overline{y_R}, \overline{z_R}) \end{cases}$$

c'est-à-dire $\vec{\overline{V}}$, vecteur en quadrature ou transformée de Hilbert du vecteur $\vec{V}$. Nous allons montrer que la définition (A-49) est identique à la définition (39). Examinons le cas composante par composante et choisissons pour la démonstration la composante $P_z$. D'après (A-49) et (A-50), on obtient :

(A-51) $$P_z = \overline{x_R}\, y_R - \overline{y_R}\, x_R$$

En utilisant (A-33) et (A-35), on vérifie facilement que :

(A-52) $$P_z = 4\ \mathrm{Im}\ (x^+ y^-) = |s^+_{xy}|^2 - |s^-_{xy}|^2$$

qui n'est autre que l'équation (39).

En réalité Shawhan (1970) définit le vecteur de polarisation en prenant la valeur moyenne, sur une période de (A-48) :

$$\vec{P}(t) = \langle \vec{s}(t-\frac{T}{4}) \wedge \vec{s}(t) \rangle \qquad \text{(A-53)}$$

tandis que Mc Pherron (1972) effectue aussi une intégration (mais dont la borne supérieure est fonction du temps).

$$P(t) = \int_0^t \{ \vec{s}(t'-\frac{T}{4}) \wedge \vec{s}(t') \} dt'$$

Il est clair que notre définition (39) ou (A-49) est plus précise.

b) Vecteur de polarisation moyenné

La vraie définition de la polarisation moyennée fait intervenir l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$. Avec notre définition (A-52), nous avons donc :

$$\langle P_z(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_z(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\mathrm{Im}(x^+ y^{-*})dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |s^+_{xy}|^2 - |s^-_{xy}|^2 \} dt \qquad \text{(A-54)}$$

D'après le théorème de puissance, cette intégration peut être transposée dans le domaine de fréquence, comme :

$$\langle P_z(t) \rangle = 4\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} X^+(f) Y^{-*}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |S^+_{xy}(f)|^2 - |S^-_{xy}(f)|^2 \} df \qquad \text{(A-55)}$$

Il est intéressant de comparer ces formules avec celles données par Means (1972) et qui sont fondées sur l'utilisation de la partie imaginaire de la matrice de cohérence. Notons tout d'abord que la matrice de cohérence est la somme d'une matrice réelle, symétrique, et d'une matrice imaginaire, antisymétrique. Ceci se vérifie d'ailleurs, dans le cas de deux dimensions, sur les équations (27) établies au paragraphe 2.4.1. On peut donc écrire :

$$\underset{=}{J} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{bmatrix} + j \cdot \begin{bmatrix} 0 & I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{xy} & 0 & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

La 3ème équation (27) montre d'ailleurs que l'on a

$$(A\text{-}57) \qquad I_{xy} = \frac{1}{2} < |S^{+}_{xy}|^2 - |S^{-}_{xy}|^2 >$$

c'est-à-dire, en utilisant (A-55) :

$$(A\text{-}58) \qquad I_{xy} = 2 \ \mathrm{Im} \ <X^{+}_{xy} \ Y^{-*}_{xy}>$$

en sorte que l'on peut écrire :

$$(A\text{-}59) \qquad <P_z> \ = 2 \ I_{xy}$$

On voit donc, par généralisation aux autres composantes, que le vecteur polarisation s'exprime en fonction de la partie imaginaire de la matrice de cohérence, à l'aide des formules :

$$(A\text{-}60) \qquad \langle \vec{P} \rangle = 2 \{ \hat{i}\, I_{yz} + \hat{j}\, I_{zx} + \hat{k}\, I_{xy} \}$$

et

$$(A\text{-}61) \qquad \begin{cases} I_{xy} = \frac{1}{2} \langle |S^{+}_{xy}|^2 - |S^{-}_{xy}|^2 \rangle \\ I_{yz} = \frac{1}{2} \langle |S^{+}_{xy}|^2 - |S^{-}_{yz}|^2 \rangle \\ I_{zx} = \frac{1}{2} \langle |S^{+}_{zx}|^2 - |S^{-}_{zx}|^2 \rangle \end{cases}$$

ou

$$(A\text{-}62) \qquad \begin{cases} I_{xy} = 2\mathrm{Im} \int X^{+}_{xy}(f)\, Y^{-*}_{xy}(f)\, df \\ I_{yz} = 2\mathrm{Im} \int Y_{yz}(f)\, Z^{-*}_{yz}(f)\, df \\ I_{zx} = 2\mathrm{Im} \int Z^{+}_{zx}(f)\, X^{-*}_{zx}(f)\, df \end{cases}$$

Il est intéressant de comparer ces formules à celles données par Means (1972) :

$$(A\text{-}63) \qquad \langle P' \rangle = \hat{i}\, I_{yz} + \hat{j}\, I_{zx} + \hat{k}\, I_{xy}$$

$$(A\text{-}64) \qquad \begin{cases} I_{xy} = \mathrm{Im} \int X(f)\, Y^{*}(f)\, df \\ I_{yz} = \mathrm{Im} \int Y(f)\, Z^{*}(f)\, df \\ I_{zx} = \mathrm{Im} \int Z(f)\, X^{*}(f)\, df \end{cases}$$

Dans ces formules, X, Y, Z représentent les transformées de Fourier des signaux analytiques associés aux signaux réels x,y,z. Une différence d'un facteur 2 provient du fait que nous avons introduit un facteur 1/2 pour définir la matrice de cohérence (équation (24) ) afin que l'énergie totale du signal soit conservée; alors que Means n'a pas tenu compte de cette condition.

### 2.7.4. - Résumé des formules utiles

- Définition :

Soït $x_R$ et $y_R$ les deux composantes orthogonales (réelles) d'un signal polarisé dans un plan. On forme le signal unidimensionnel complexe

$$s_{xy} = x_R + j\, y_R$$

- Changement de repère :

Ce signal n'est pas modifié par un changement du repère de mesure des deux composantes orthogonales, à l'exception d'un terme de phase

$$s_{x'y'} = s_{xy} \cdot \exp(-j\theta)$$

Dans un système d'axes de mesure $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ en rotation à la fréquence $f_s$, le nouveau signal devient :

$$s_{\tilde{x}\tilde{y}} = s_{xy} \exp(-2\pi j\, f_s\, t)$$

et son spectre $S_{\tilde{x}\tilde{y}}(f)$ se déduit du spectre original $S_{xy}(f)$ par une

translation de l'origine des fréquences :

$$S_{xy}^{\sim\sim}(f) = S_{xy}(f + f_s)$$

- Décomposition en composantes tournantes :

On écrit :

$$s_{xy}(t) = s_{xy}^{+}(t) + s_{xy}^{-}(t)$$

avec son équivalent dans le domaine des fréquences :

$$S_{xy}(f) = S_{xy}^{+}(f) + S_{xy}^{-}(f)$$

où $S^{+}(f)$ et $S^{-}(f)$ sont définis par :

$$\begin{cases} S_{xy}^{+}(f) = \begin{cases} S_{xy}(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \\ \\ S_{xy}^{-}(f) = \begin{cases} 0 & f > 0 \\ S_{xy}(f) & f < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Les signaux $s^{+}$ et $s^{-}$ sont les deux signaux analytiques que l'on peut associer au signal s et correspondent à une décomposition suivant deux vecteurs circulaires tournant en sens opposé. $s^{+}$ et $s^{-}$ sont définis par :

$$\begin{cases} s_{xy}^{+} = x^{+} + j\ y^{+} \\ \\ s_{xy}^{-} = x^{-} + j\ y^{-} \end{cases}$$

et les quantités $x^+$, $x^-$, $y^+$, $y^-$ se définissent à partir des signaux réels originaux $x_R$, $y_R$ et de leurs composantes en quadrature $\overline{x_R}$, $\overline{y_R}$.

$$\begin{cases} x^+ = \frac{1}{2}\{x_R + j\,\overline{x_R}\} \\ x^- = \frac{1}{2}\{x_R - j\,\overline{x_R}\} \\ \overline{x_R} = \mathcal{H}i\{x_R\} \end{cases} \qquad \begin{cases} y^+ = \frac{1}{2}\{y_R + j\,\overline{y_R}\} \\ y^- = \frac{1}{2}\{x_R - j\,\overline{y_R}\} \\ \overline{y_R} = \mathcal{H}i\{y_R\} \end{cases}$$

- Ellipticité :

Pour un signal à deux dimensions, on a les relations simples suivantes qui définissent les grand et petit axes a et b, l'ellipticité $\varepsilon = b/a$ et l'angle $\theta$ entre l'axe des x et le grand axe de l'ellipse

$$\begin{cases} a = |s^+| + |s^-| \\ b = |s^+| - |s^-| \\ \varepsilon = (|s^+| - |s^-|)/(|s^+| + |s^-|) \\ \theta = [\mathrm{Arg}(s^+) + \mathrm{Arg}(s^-)]/2 \end{cases}$$

Et l'on a démontré que ces relations étaient équivalentes aux relations géométriques compliquées utilisées habituellement.

- Matrice de cohérence :

Dans le cas bi-dimensionnel, la matrice de cohérence, qui s'écrit :

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \langle x_a x_a^* \rangle & \langle x_a y_a^* \rangle \\ \langle y_a x_a^* \rangle & \langle y_a y_a^* \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \langle X_a X_a^* \rangle & \langle X_a Y_a^* \rangle \\ \langle Y_a X_a^* \rangle & \langle Y_a Y_a^* \rangle \end{bmatrix}$$

où $x_a$ et $y_a$, $X_a$ et $Y_a$ sont les signaux analytiques (au sens usuel) et leurs transformées de Fourier associées aux signaux originaux ($x_a = x + j\,\bar{x}$), peut s'exprimer à l'aide des composantes tournantes :

$$\begin{cases} J_{xx} = \frac{1}{2} \langle |S^+|^2 + |S^-|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{S^+ S^-\} \rangle \\ J_{yy} = \frac{1}{2} \langle |S^+|^2 + |S^-|^2 - 2\,\mathrm{Re}\{S^+ S^-\} \rangle \\ J_{xy} = \frac{j}{2} \langle |S^+|^2 - |S^-|^2 - 2\,j\,\mathrm{Im}\{S^+ S^-\} \rangle \\ J_{yx} = J_{xy}^* \end{cases}$$

Alors les puissances polarisées, P, et totale, T, intégrées, qui s'expriment de façon générale par :

$$\begin{cases} \langle P \rangle = \left\{ (\mathrm{Tr}\ \underline{\underline{J}})^2 - 4 \cdot \mathrm{Det}\ \underline{\underline{J}} \right\}^{1/2} \\ \langle T \rangle = \mathrm{Tr}\ \underline{\underline{J}} \end{cases}$$

deviennent :

$$\begin{cases} \langle P \rangle = \{\langle |S^+|^2 - |S^-|^2 + |\langle 2\, S^+ \cdot S^- \rangle|^2 \} ^{1/2} \\ \langle T \rangle = \langle |S^+|^2 + |S^-|^2 \rangle \end{cases}$$

On peut décomposer la puissance polarisée en puissance polarisée circulairement, $P_c$, et puissance polarisée linéairement, $P_l$ :

$$\begin{cases} \langle P \rangle = \{\langle P_c \rangle^2 + |\langle P_l \rangle|^2\}^{1/2} \\ \langle P_c \rangle = \langle |S^+|^2 - |S^-|^2 \rangle \\ \langle P_l \rangle = \langle 2\, S^+ S^- \rangle \end{cases}$$

On remarque que :

$$\langle P_c \rangle = 2\, \mathrm{Im}\{J_{xy}\}$$

La transcription en terme d'ellipticité et de direction du grand axe de l'ellipse, est :

$$\langle P_c \rangle = \langle a^2 \varepsilon \rangle$$

$$\langle P_l \rangle = \langle \frac{a^2}{2} (1-\varepsilon^2) \exp(2j\theta) \rangle$$

- Vecteur de polarisation :

Dans le cas tridimensionnel, et pour une polarisation non linéaire, on peut définir un vecteur instantané de polarisation, en utilisant les 3 signaux complexes associés aux 3 signaux réels :

$$\begin{cases} s_{xy} = x_R + j\, y_R = s^+_{xy} + s^-_{xy} \\ s_{yz} = y_R + j\, z_R = s^+_{yz} + s^-_{yz} \\ s_{zx} = z_R + j\, x_R = s^+_{zx} + s^-_{zx} \end{cases}$$

Le vecteur de polarisation instantanée est alors :

$$\begin{cases} \vec{P} = \hat{i}\, P_x + \hat{j}\, P_y + \hat{k}\, P_z \\ P_x = |s^+_{yz}|^2 - |s^-_{yz}|^2 = P_{c_{yz}} \\ P_y = |s^+_{zx}|^2 - |s^-_{yz}|^2 = P_{c\ zx} \\ P_z = |s^+_{xy}|^2 - |s^-_{xy}|^2 = P_{c\ xy} \end{cases}$$

° ° °

## REFERENCES DE LA DEUXIEME PARTIE

ARTHUR., C.W., R.L. Mc PHERRON, J.D. MEANS. A comparative study of three techniques for using the spectral matrix in wave analysis. Univ. California Pub. N° 1519, Los Angeles, 1975, to be published, Radio Sci., 1976.

BERTHOMIER., R.C., Sur une méthode d'analyse de signaux. Ann. Géophys., 31, 239-252, 1975.

BORN., M., et E. WOLF. Principles of optics, PP.24-35 et PP.541-542, Pergamon, London, 1959.

BRUHAT., G., et A. KASTLER. Optique, 6ème ed., Masson & Cie. pp.47-49, Paris, 1965.

BUDDEN., K.G., Complex vectors in magnetoionic theory. J. Inst. Telecom. Engrs. 10, 292-298, 1964.

FOWLER., R.A., B.J. KOTICK, et R.D. ELLIOTT. Polarization analysis of natural and artificially induced geomagnetic micropulsations. J. Geophys. Res., 72, 2871-2883, 1967.

GABOR., D., Theory of communication., J. IEE (London) 93, 429-457, 1946.

GENDRIN., R., M.V. GOKHBERG, S.LACOURLY, et V.A. TROITSKAYA. Etude en deux stations magnétiquement conjuguées de la polarisation des oscillations hydromagnétiques de type Pc 1. Comptes-rendus Acad. Sci., 262, 786-789, 1966 a.

GENDRIN., R.. M.V. GOKHBERG, S. LACOURLY, et V.A. TROITSKAYA., Apparition simultanée de pulsations magnétiques d'ultra-basse fréquence en phase en deux points conjugués. Comptes-rendus Acad. Sci., 262, 845-848, 1966 b.

GENDRIN., R., K. KODERA, S. PERRAUT, et C. de VILLEDARY., Définition de "sommaires expérimentateurs" pour l'expérience U.B.F. S-300, Rapport CRPE, janvier 1976.

GLANGEAUD., F., J.L. LACOUME, Localization of $P_c$1., Rapport CEPHAG. N° 41/75. Univ. Grenoble. 1975.

GOKHBERG., M.V., O.A. POKHOTELOV, S. PERRAUT, C. de VILLEDARY et N. WEHRLIN., Analyse détaillée des échanges d'énergie et de la polarisation des raies composant la structure fine des $P_c$ 1., Ann. Géophys., 30. 309-318, 1974.

HUNTER., J., Data handling plan., Experiment S-300 G.E.O.S. E.S.R.O., 6, pp. 7/10-7/15 et pp. 8/5-8/7, 1974.

KARCZEWSKI., J.F., J.M. MOREAU, F.X. SENE, et B. DUBOYS., La station de calibration et de tests magnétiques de Chambon-la-Forêt., N.T.P. CRPE, à paraître, 1976.

KODERA., K., Prétraitement des données U.B.F. de G.E.O.S. Rapport CRPE, décembre, 1973.

KODERA., K., Tests sur la chaîne de mesure U.B.F. embarquée à bord de G.E.O.S., Rapport CRPE, juin, 1974.

KODERA., K., et S. PERRAUT. Traitement des données U.B.F. qui seron enregistrées à bord de GEOS. Rapport CRPE. février, 1975.

Mc PHERRON, R.L., et P.J. COLEMAN. Satellite observations of band-limited micropulsations during a magnetospheric substorm, J. Geophys. Res., 76, 3020-3021, 1971.

Mc PHERRON., R.L., C.T. RUSSELL, et P.J. COLEMAN., Fluctuating magnetic fields in the magnetosphere, II. ULF wave, Space Sci. Rev., 13, 411-454, 1972.

MEANS., J.D., Use of the three-dimensional covariance matrix in analysing the polarization properties of plane waves., J. Geophys. Res., 77, 5551-5559, 1972.

RANKIN., D., et R. KURTZ., Statistical study of micropulsation polarization., J. Geophys. Res. 75, 5444-5448, 1970.

RIGUET. R., Calculateur analogique de l'enveloppe,de la fréquence et de la phase instantanée de signaux naturels., Thèse Univ. Paris VI, 1974.

SAMSON., J.C., Three-dimensional polarization characteristics of high -latitude $P_c$ 5 geomagnetic micropulsations. J. Geophys. Res., 77, 6145-6160, 1972.

SHAWHAN., S.D., The use of multiple receivers to measure the wave characteristics of Very-Low-Frequency noise in space., Space Sci. Res., 10, 689-763, 1970.

VILLE., J., Théorie et applications de la notion de signal analytique. Cables et Transmissions, 1, 61-74, 1948.

WEHRLIN., N., Structure fine des oscillations en "perles"., Thèse, Univ. Paris VII, PP.11-17, 1972.

° ° °

## LEGENDE DES FIGURES

FIGURE 1 - Définition du sens de rotation dans le plan complexe selon le signe de la fréquence du signal.

FIGURE 2 - Définition de la puissance polarisée circulairement selon le sens de rotation du signal dans le plan.

FIGURE 3 - Analyse spectrale des composantes orthogonales et des composantes tournantes d'un signal composite. Celui-ci est constitué par trois signaux monochromatiques de même intensité, de même ellipticité ($\varepsilon = +0.2$) et de même sens de rotation. Les directions des grands axes des ellipses de polarisation font des angles de +45°, +90° et -45° pour les fréquences de 0.5, 1.0 et 1.5 Hz respectivement.

La figure représente, de haut en bas: les spectres d'amplitude des composantes orthogonales, $|X_R|$ (en trait plein), $|Y_R|$ (en trait pointillé); la différence de phase entre les spectres $X_R$ et $Y_R$; les spectres d'amplitude des composantes tournantes, $|S^+_{xy}|$ (en trait plein), $|S^-_{xy}|$ (en trait pointillé) et la demi-somme des phases de $S^+_{xy}$ et $S^-_{xy}$ (ce qui est équivalent à la demi-différence des phases de $S^+_{xy}$ et $(S^-_{xy})^*$. Les amplitudes sont normalisées à leur valeur maximale.

On remarque que les spectres des composantes tournantes sont plus directement interprétables que ceux des composantes orthogonales (intensité, ellipticité, sens de rotation).

FIGURE 4 - Même signal que dans l'exemple précédent auquel on a ajouté un bruit blanc. Le rapport total signal à bruit, dans la bande de fréquence $-f_e/2 - +f_e/2$, est de 20 dB.

FIGURE 5 - Même signal que dans l'exemple précédent, sauf que l'ellipticité et l'amplitude des trois signaux sont maintenant différentes ($\varepsilon$ = +0.7, +0.2 et -0.3; A = 1, 0.84 et 0.86, pour les fréquences de 0.5, 1.0 et 1.5 Hz respectivement). Le changement de signe de l'ellipticité (c'est-à-dire le changement du sens de rotation) est clairement visible sur le spectre d'amplitude des composantes tournantes alors qu'on ne note aucune différence, par rapport à la figure 4, sur le spectre d'amplitude des composantes orthogonales. Par ailleurs, la demi-somme des phases des composantes tournantes (c'est-à-dire la direction des grands axes des ellipses) est la même que pour la figure 4, alors que la phase relative des composantes orthogonales a complètement changé, bien que la direction des axes soit restée la même.

FIGURE 6 - Simulation de la rotation des axes du repère de mesure. Le signal utilisé est - dans le repère fixe - le même que celui de l'exemple précédent, sauf qu'on lui a

retiré le bruit. On a ajouté une rotation du repère de mesure dans le sens rétrograde à la fréquence $f_s$ =-0.06 Hz. La figure du haut représente le spectre d'amplitude des composantes mesurées dans le repère tournant: le spectre est très déformé par la rotation. La figure du milieu représente les spectres d'amplitude des deux composantes tournantes $S_{xy}^{+}$ et $S_{xy}^{-}$ dans le repère tournant: chaque composante est affectée d'un décalage de sens opposé. La figure du bas donne les spectres d'amplitude $S_{xy}^{+}$ et $S_{xy}^{-}$ dans le repère fixe, c'est-à-dire corrigés de l'effet de rotation par une simple translation de l'origine des fréquences: on retrouve avec clarté les trois signaux originaux.

FIGURE 7 - Organigramme de la méthode de la fenêtre glissante adaptée à l'analyse de la polarisation par utilisation du signal complexe. De haut en bas: formation du signal complexe à partir des deux composantes réelles orthogonales; calcul du spectre à l'aide d'une transformée de Fourier rapide; filtrage à la fréquence positive et à la fréquence négative; application des transformées inverses qui fournissent les composantes tournantes du signal, analysées en fréquence et en temps; calcul de la puissance totale et de la puissance polarisée circulairement; visualisation des résultats que l'on sépare, pour des commodités de visualisation, en puissance circulaire droite et puissance circulaire gauche.

FIGURE 8 - Résultat de l'analyse précédente appliquée à un cas de perles à polarisation simple (événement enregistré le 06.02.1971 à Heard). Le signal à 0.75 Hz est nettement polarisé à gauche; celui à 0.9 Hz est très fortement linéaire.

FIGURE 9 - Même signal que sur la figure précédente mais pour lequel on a visualisé l'ellipticité, en séparant les cas d'ellipticité positive (ici signal polarisé dans le mode gauche) et d'ellipticité négative (mode droit). Les ellipticités de module inférieur à 0.2 ont été représentées par des blancs si bien que l'on ne voit pas apparaître le signal polarisé linéairement au voisinage de 0.9 Hz.

FIGURE 10 - Analyse d'un cas de perles à double polarisation (événement du 03.02.1971 enregistré à Heard). Le signal à 1.3 Hz est nettement polarisé à gauche tandis que ceux à 1.15 et 1.45 sont plus typiquement polarisés à droite.

FIGURE 11 - Exemple de simulation de la rotation d'un satellite. Le signal envoyé est polarisé linéairement. Les antennes sont placées sur une table tournante.

a) Résultat de l'analyse spectrale: Les deux figures du haut représentent les spectres d'amplitude de deux composantes orthogonales reçues dans le plan de rotation $B_X$, $B_Y$. La figure du bas représente le

spectre d'amplitude du signal original injecté dans le repère fixe.

b) Forme d'onde de signal. De haut en bas: signal original injecté; une composante orthogonale reçue dans le plan de rotation, $B_X$; signal $B_X$ corrigé de l'influence de la fonction de transfert de l'antenne; signal $B_X$ corrigé de l'influence de l'antenne et filtré du bruit de fond; signal original filtré dans la même bande.

FIGURE 12 - Simulation de la rotation d'un satellite (suite).

a) Résultat de l'analyse spectrale. De haut en bas: Spectres d'amplitude des composantes tournantes observées dans le repère en rotation et corrigées de l'influence de la fonction de transfert des antennes; spectre d'amplitude du signal original injecté. Les axes de fréquence de $B^+_{xy}$ et $B^-_{xy}$ ont été décalés pour effectuer la correction de rotation. A l'exception d'un bruit de très basse fréquence sur $B^-_{xy}$, la similitude entre $B^+_{xy}$ et $B^-_{xy}$ et entre ces deux spectres et le spectre du signal original, montre bien que la polarisation est linéaire.

b) Formes d'onde correspondant aux spectres précédents: les deux composantes tournantes (en haut) et le signal original (en bas). Ils sont tous filtrés du bruit.

FIGURE 13 - Simulation de la visualisation des résultats de l'analyse préliminaire (sommaire des expérimentateurs) qui sera effectuée sur les données UBF de GEOS. De haut en bas: spectres polarisés à gauche et à droite dans le plan de rotation du satellite ($B^+$ et $B^-$) et spectre enregistré le long de l'axe de rotation du satellite ($B_z$). A chaque spectre est associée une indication de l'amplification utilisée pour visualiser le spectre. Cette amplification s'adapte à la dynamique restreinte du noircissement en fonction de l'amplitude du signal.

°
° °

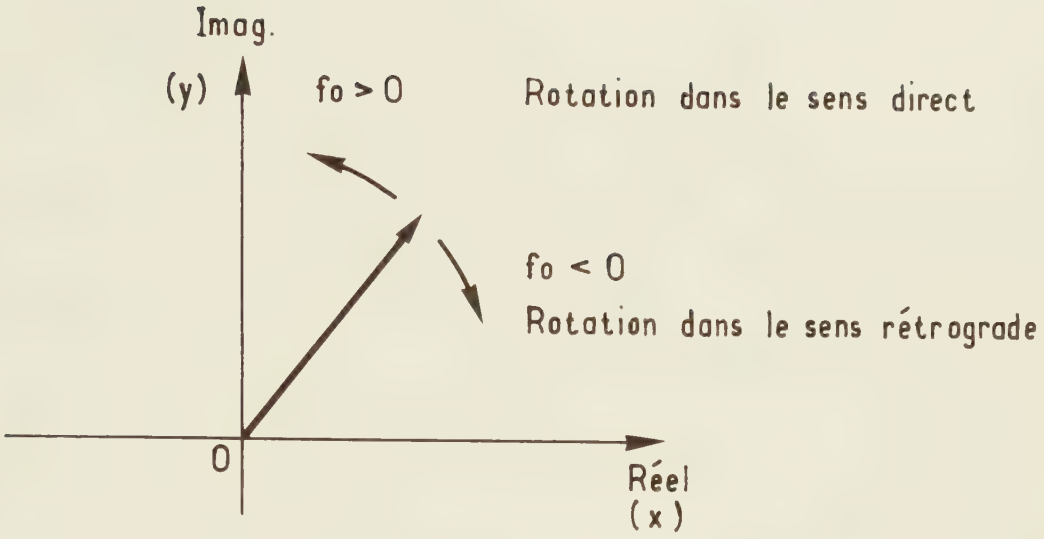

Imag.
(y)
fo > 0
Rotation dans le sens direct
fo < 0
Rotation dans le sens rétrograde
0
Réel
(x)

Fig. 1

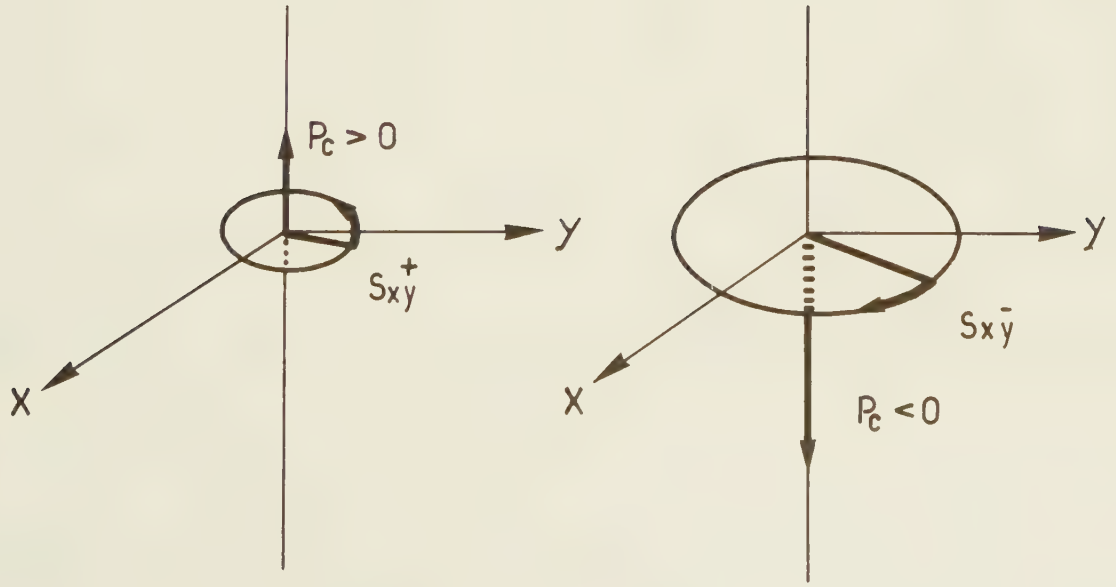

Pc > 0
y
Sxy+
x
y
Sxy-
x
Pc < 0

Fig. 2

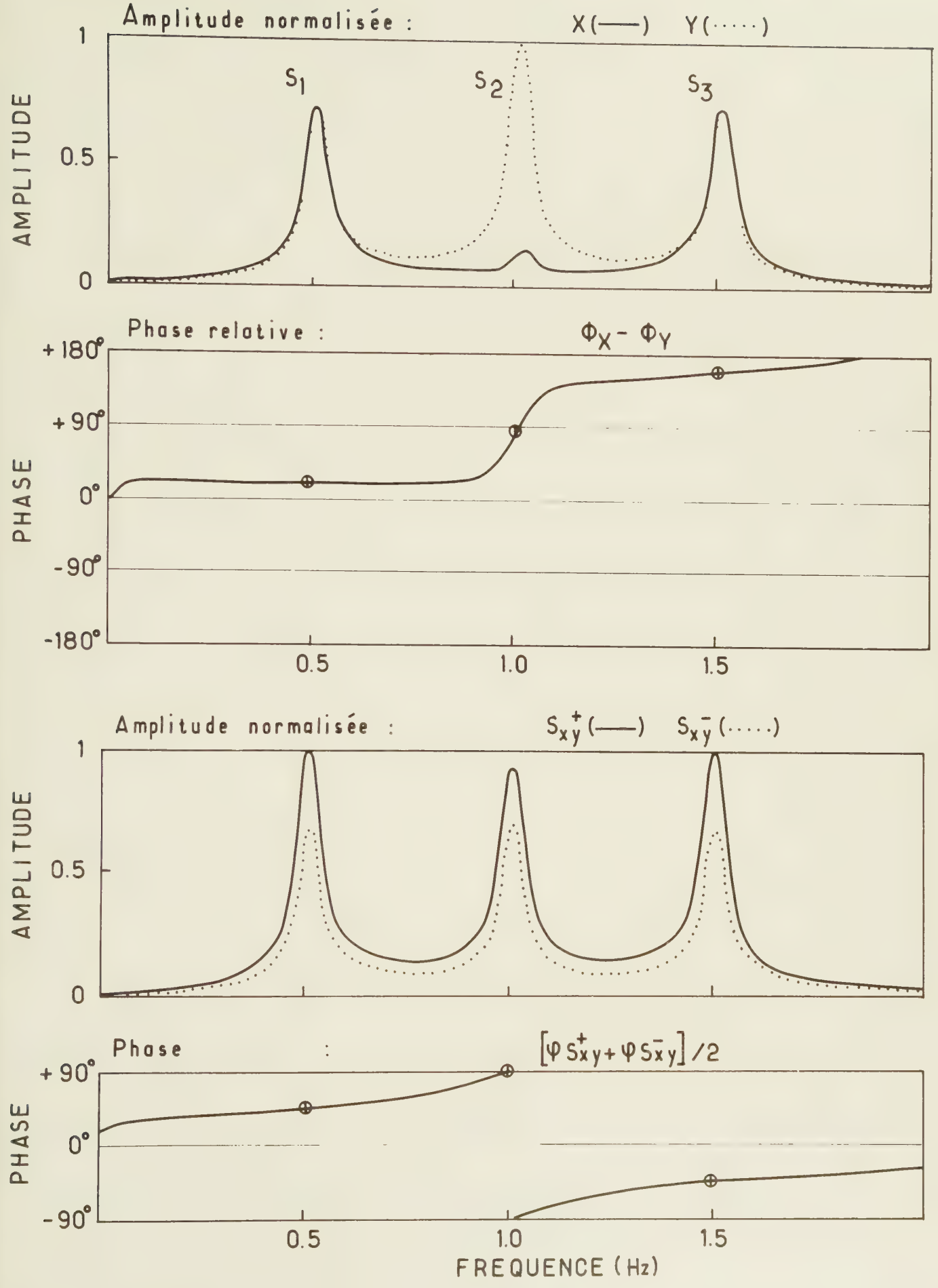

Amplitude normalisée :
X(——) Y(·····)
AMPLITUDE
1
0.5
0
S1
S2
S3
Phase relative :
ΦX - ΦY
PHASE
+180°
+90°
0°
-90°
-180°
0.5
1.0
1.5
Amplitude normalisée :
S+xy (——) S-xy (·····)
AMPLITUDE
1
0.5
0
Phase :
[φS+xy + φS-xy]/2
PHASE
+90°
0°
-90°
0.5
1.0
1.5
FREQUENCE (Hz)

Fig. 3

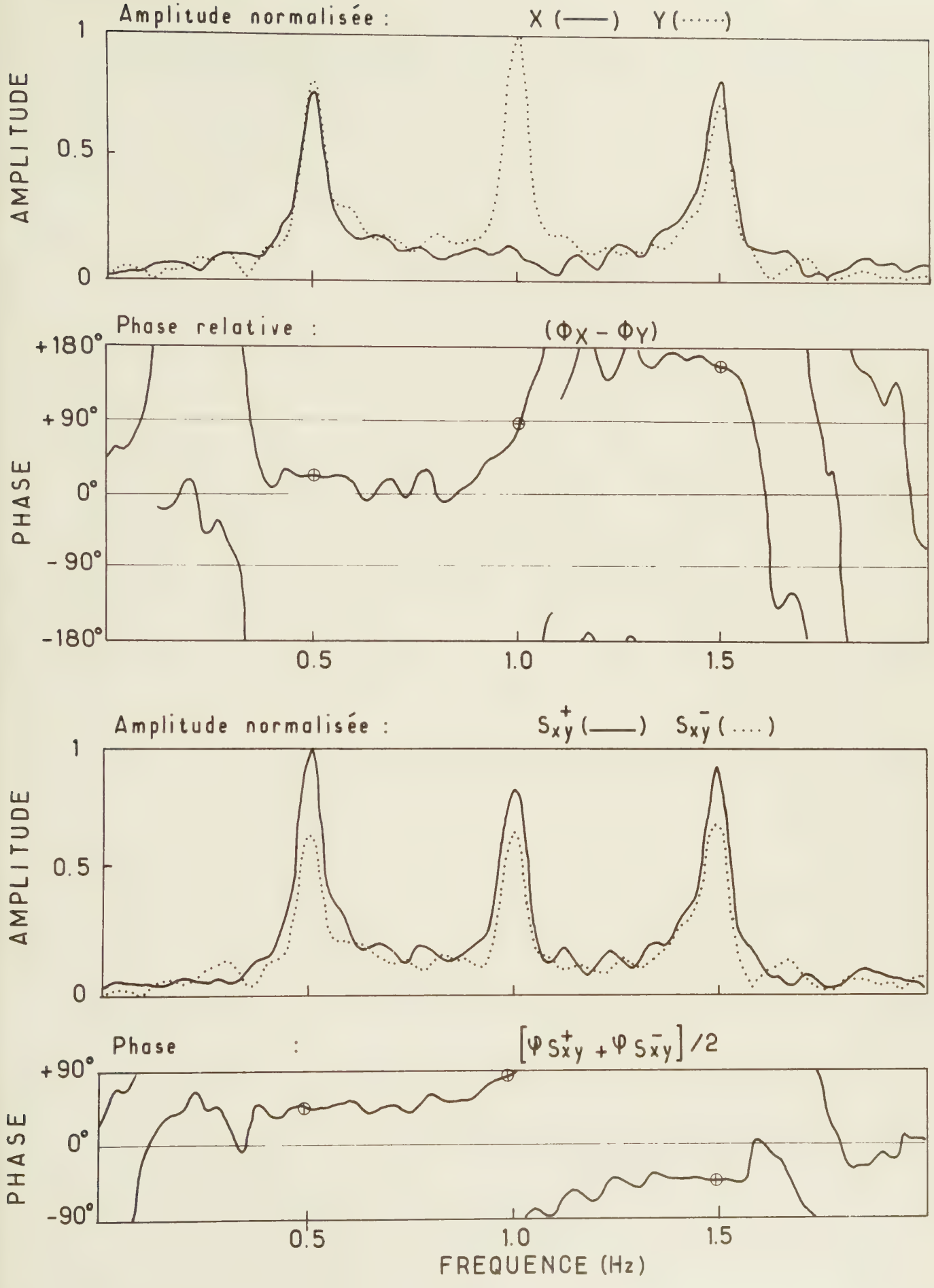

Amplitude normalisée : X (——) Y (·····)
AMPLITUDE
1
0.5
0
Phase relative : (ΦX - ΦY)
PHASE
+180°
+90°
0°
-90°
-180°
0.5
1.0
1.5
Amplitude normalisée : $S_{xy}^{+}$ (——) $S_{x\bar{y}}$ (····)
AMPLITUDE
1
0.5
0
Phase : $[\varphi S_{xy}^{+} + \varphi S_{x\bar{y}}]/2$
PHASE
+90°
0°
-90°
0.5
1.0
1.5
FREQUENCE (Hz)

Fig. 4

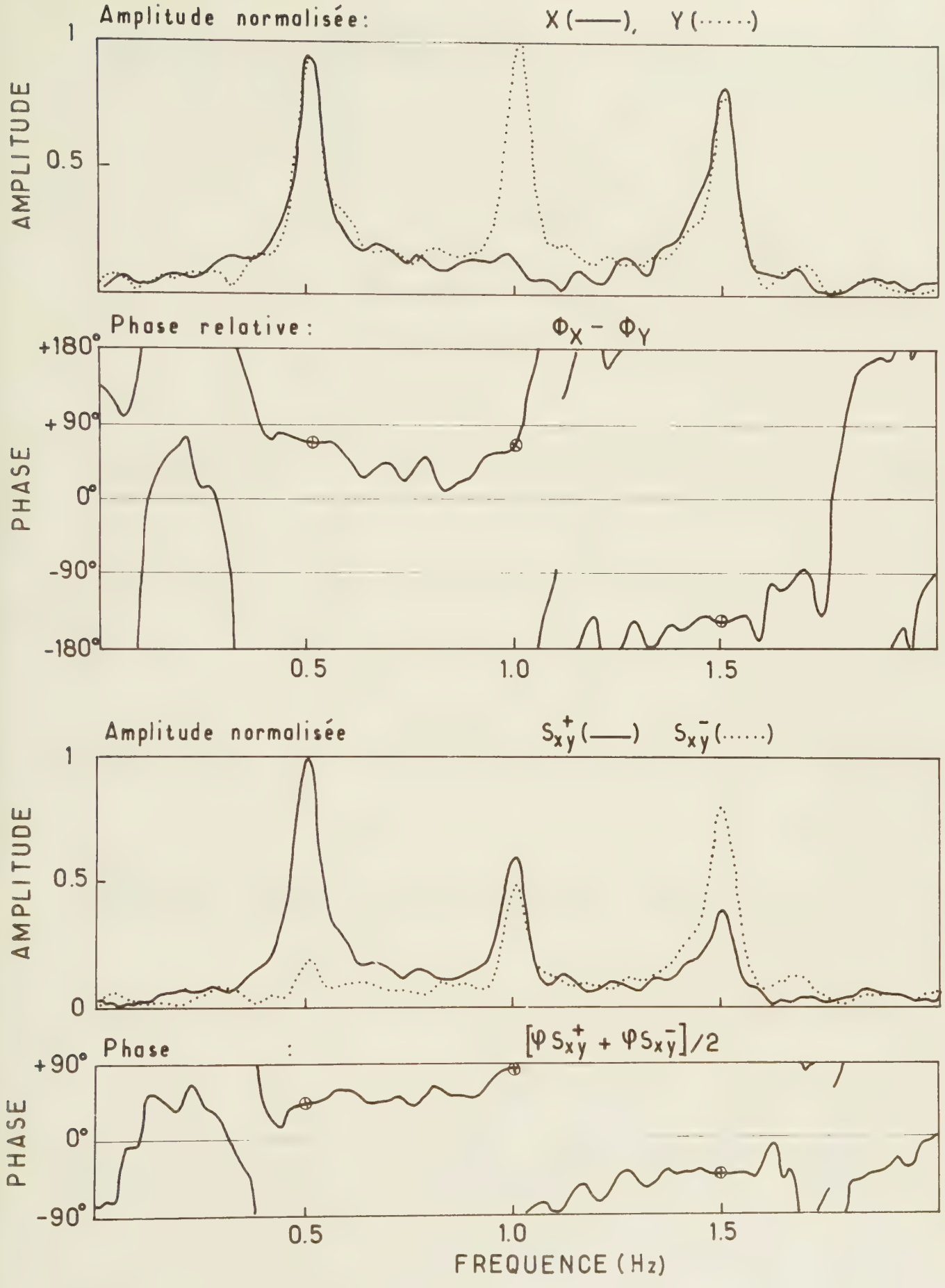

Amplitude normalisée: X (——), Y (·····)
AMPLITUDE
1
0.5
Phase relative: $\Phi_X - \Phi_Y$
PHASE
+180°
+90°
0°
-90°
-180°
0.5
1.0
1.5
Amplitude normalisée $S_{xy}^{+}$(——) $S_{xy}^{-}$(·····)
AMPLITUDE
1
0.5
0
Phase : $[\varphi S_{xy}^{+} + \varphi S_{xy}^{-}]/2$
PHASE
+90°
0°
-90°
0.5
1.0
1.5
FREQUENCE (Hz)

Fig. 5

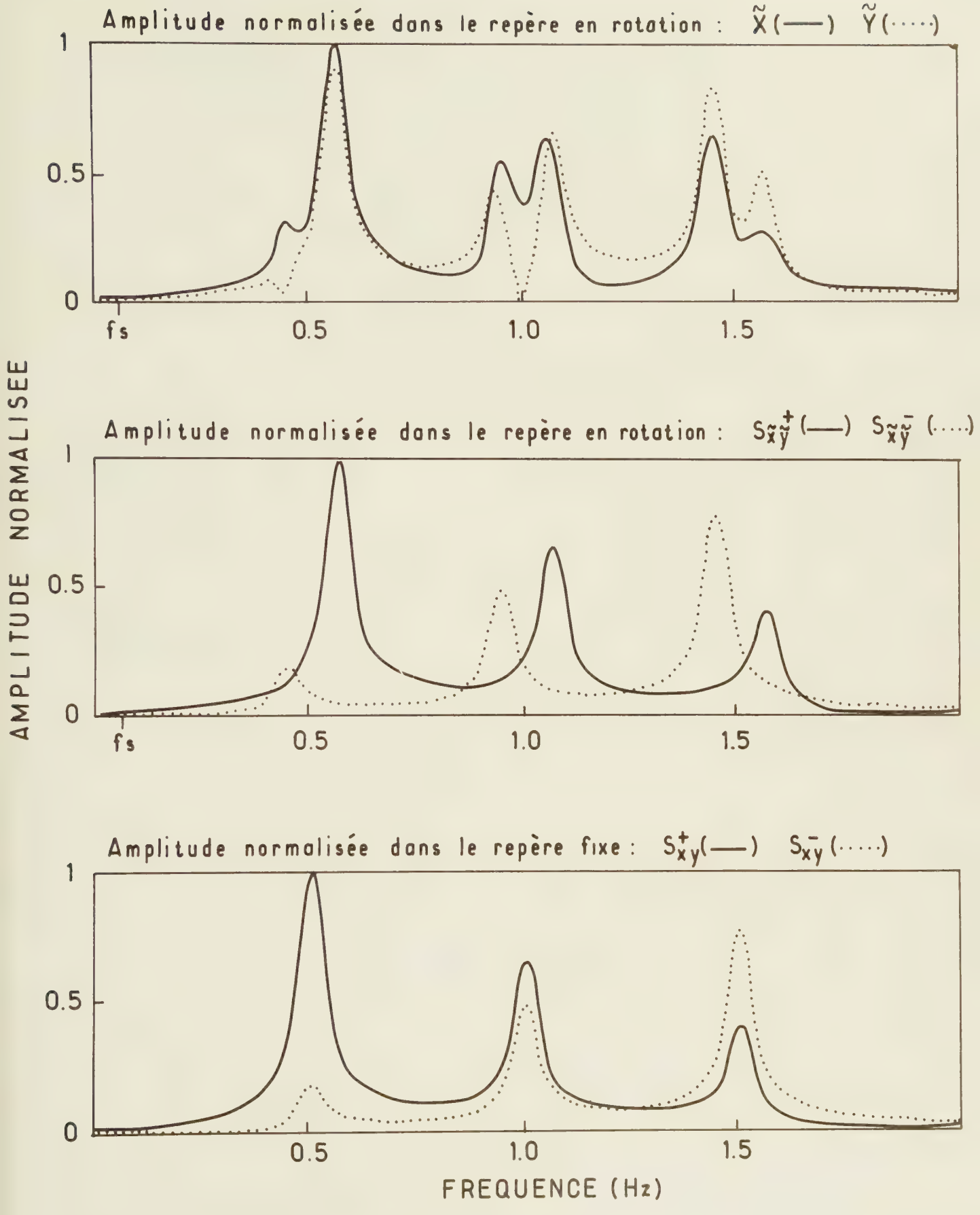

Amplitude normalisée dans le repère en rotation : $\tilde{X}$ (——) $\tilde{Y}$ (·····)
Amplitude normalisée dans le repère en rotation : $S_{\tilde{x}\tilde{y}}^{+}$ (——) $S_{\tilde{x}\tilde{y}}^{-}$ (·····)
Amplitude normalisée dans le repère fixe : $S_{xy}^{+}$ (——) $S_{xy}^{-}$ (·····)
AMPLITUDE NORMALISEE
1
0.5
0
fs
0.5
1.0
1.5
FREQUENCE (Hz)

Fig. 6

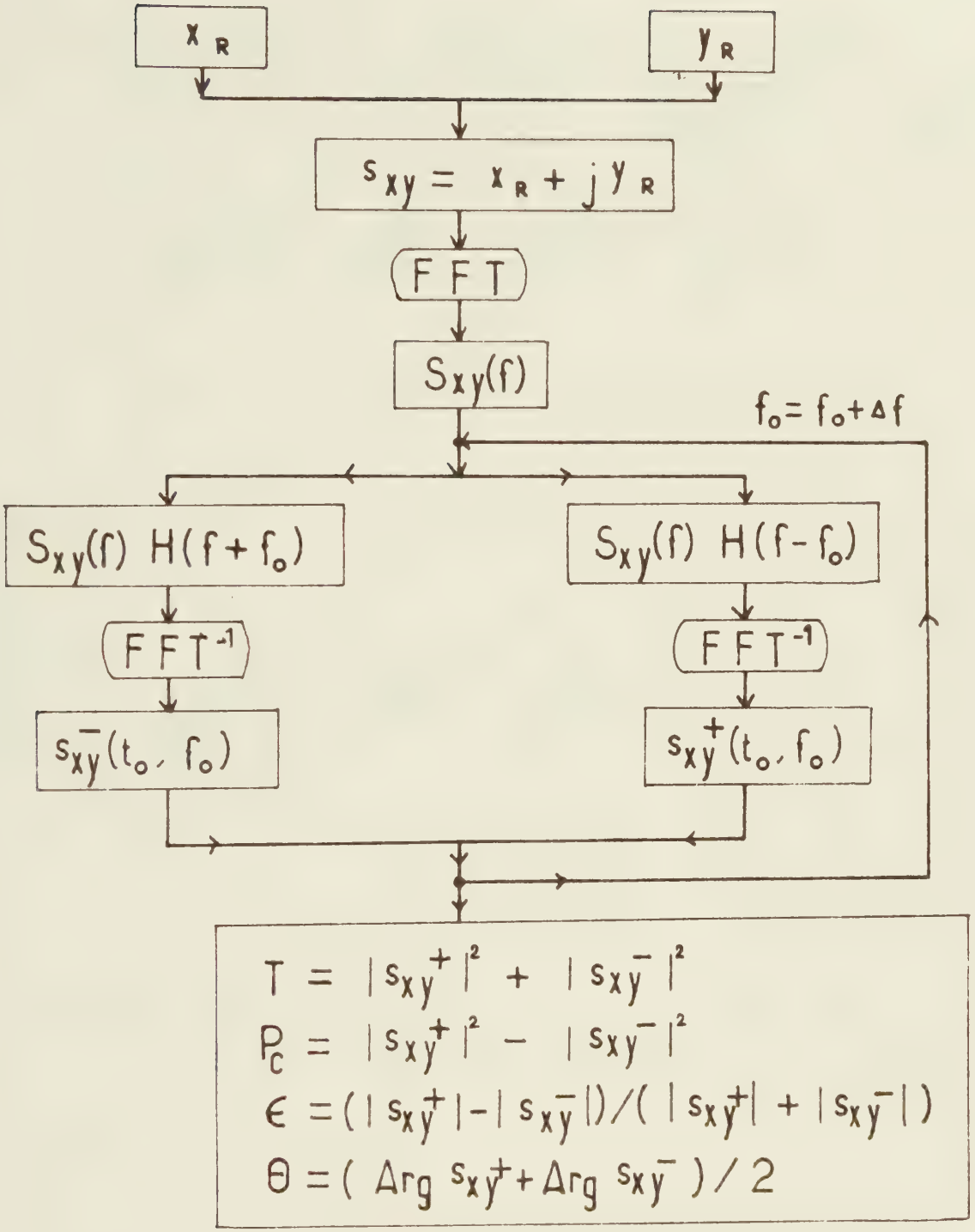

$x_R$
$y_R$
$s_{xy} = x_R + j\,y_R$
FFT
$S_{xy}(f)$
$f_o = f_o + \Delta f$
$S_{xy}(f)\ H(f+f_o)$
$S_{xy}(f)\ H(f-f_o)$
$FFT^{-1}$
$FFT^{-1}$
$s_{xy}^{-}(t_o, f_o)$
$s_{xy}^{+}(t_o, f_o)$
$T = |s_{xy}^{+}|^2 + |s_{xy}^{-}|^2$
$P_c = |s_{xy}^{+}|^2 - |s_{xy}^{-}|^2$
$\epsilon = (|s_{xy}^{+}| - |s_{xy}^{-}|)/(|s_{xy}^{+}| + |s_{xy}^{-}|)$
$\theta = (\mathrm{Arg}\ s_{xy}^{+} + \mathrm{Arg}\ s_{xy}^{-})/2$

Fig. 7

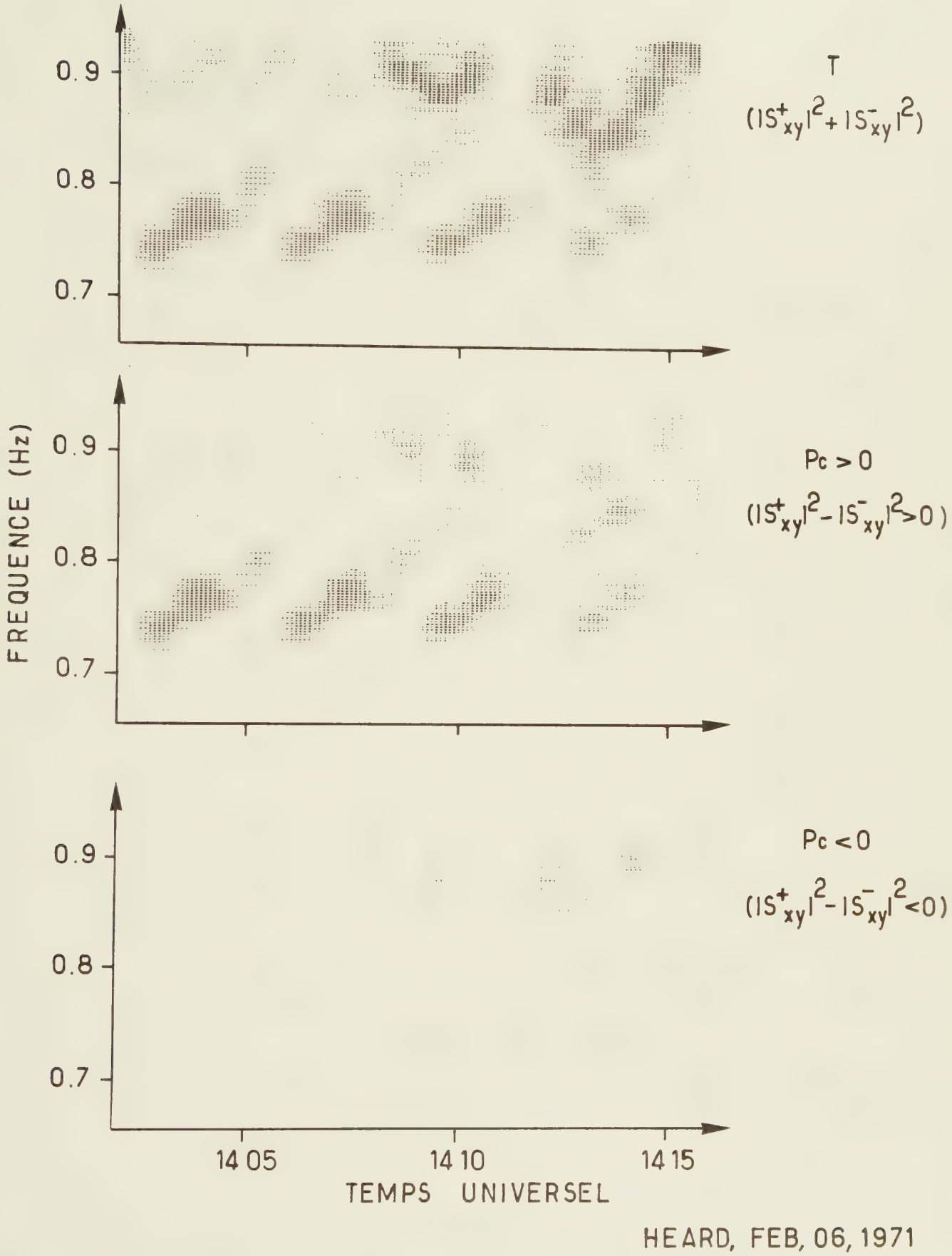

T
$(|S^+_{xy}|^2+|S^-_{xy}|^2)$
Pc > 0
$(|S^+_{xy}|^2-|S^-_{xy}|^2>0)$
Pc < 0
$(|S^+_{xy}|^2-|S^-_{xy}|^2<0)$
FREQUENCE (Hz)
0.9
0.8
0.7
14 05
14 10
14 15
TEMPS UNIVERSEL
HEARD, FEB, 06, 1971

Fig. 8

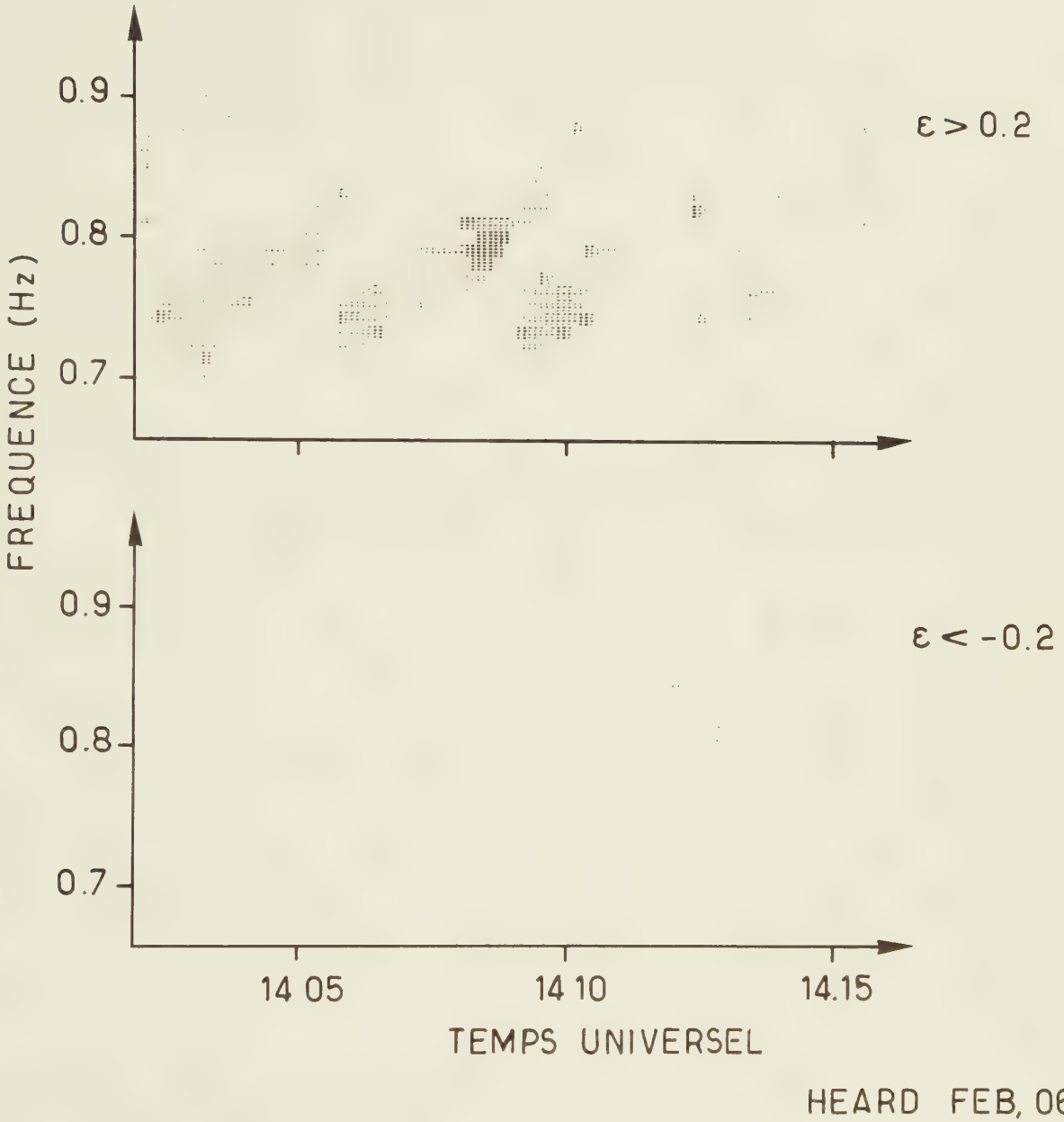

0.9
0.8
0.7
FREQUENCE (Hz)
ε > 0.2
0.9
0.8
0.7
ε < -0.2
14 05
14 10
14.15
TEMPS UNIVERSEL
HEARD FEB, 06, 1971

Fig. 9

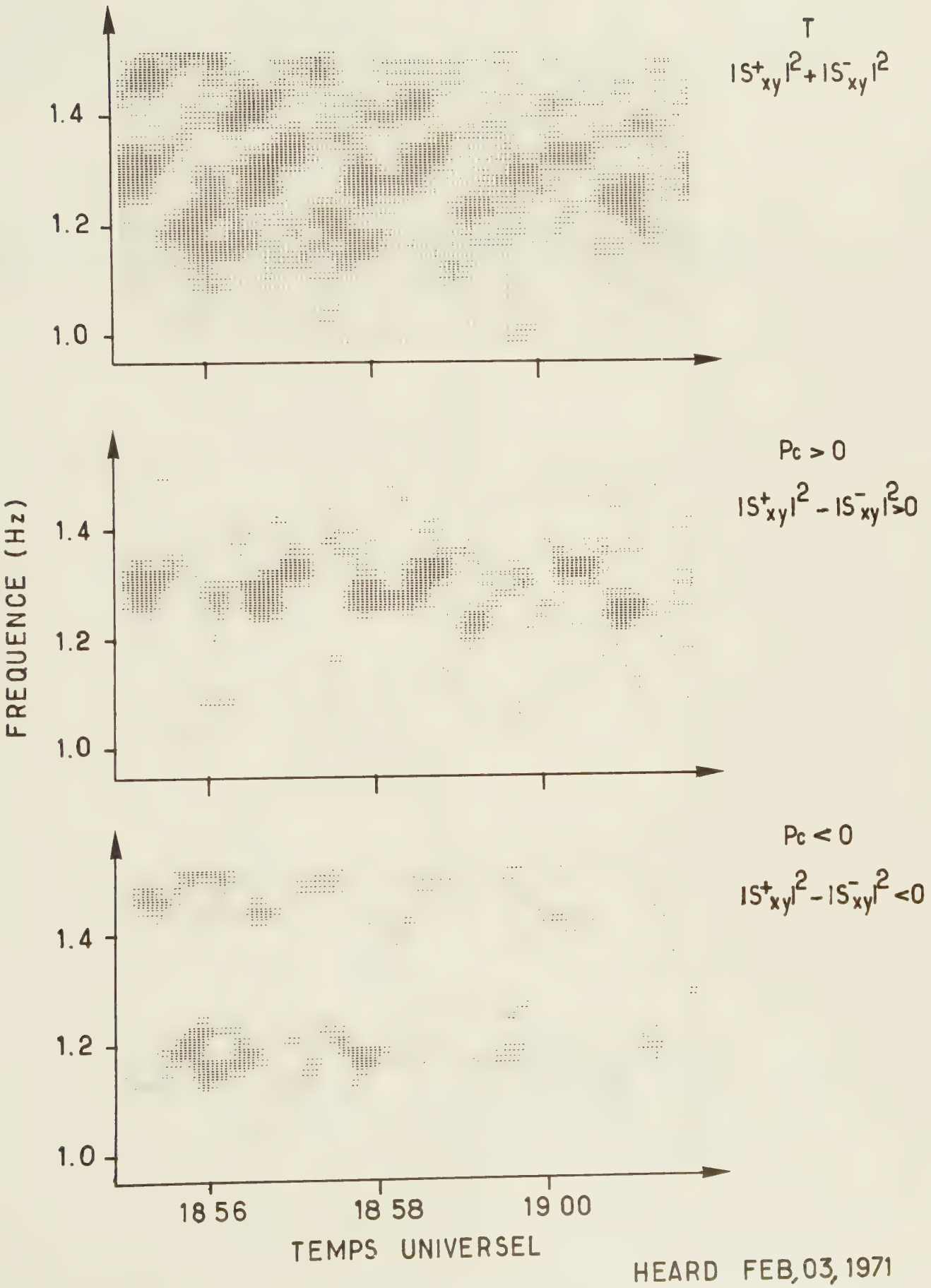

T
$|S^+_{xy}|^2 + |S^-_{xy}|^2$
1.4
1.2
1.0
Pc > 0
$|S^+_{xy}|^2 - |S^-_{xy}|^2 > 0$
FREQUENCE (Hz)
1.4
1.2
1.0
Pc < 0
$|S^+_{xy}|^2 - |S^-_{xy}|^2 < 0$
1.4
1.2
1.0
18 56
18 58
19 00
TEMPS UNIVERSEL
HEARD FEB, 03, 1971

Fig. 10

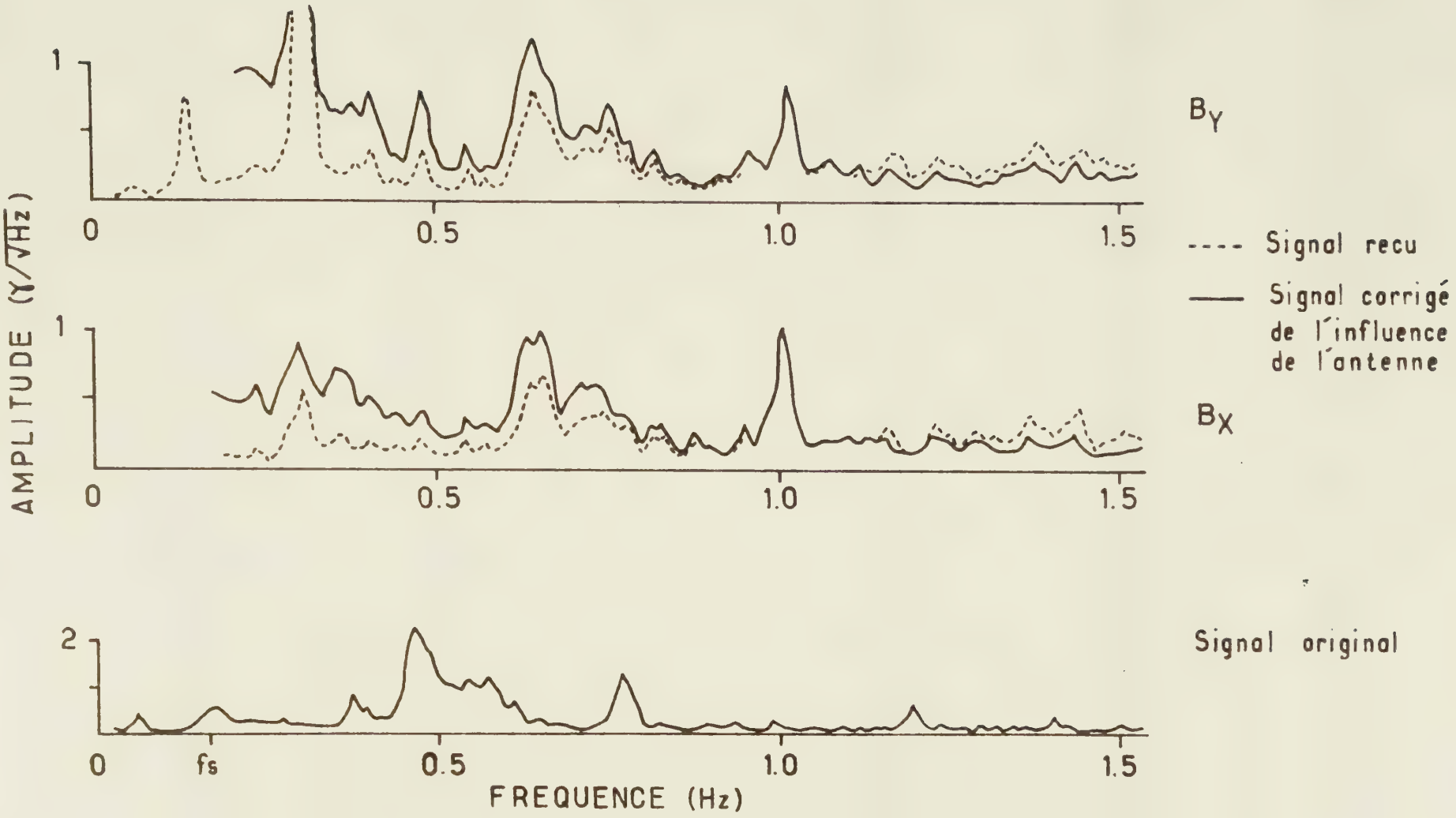
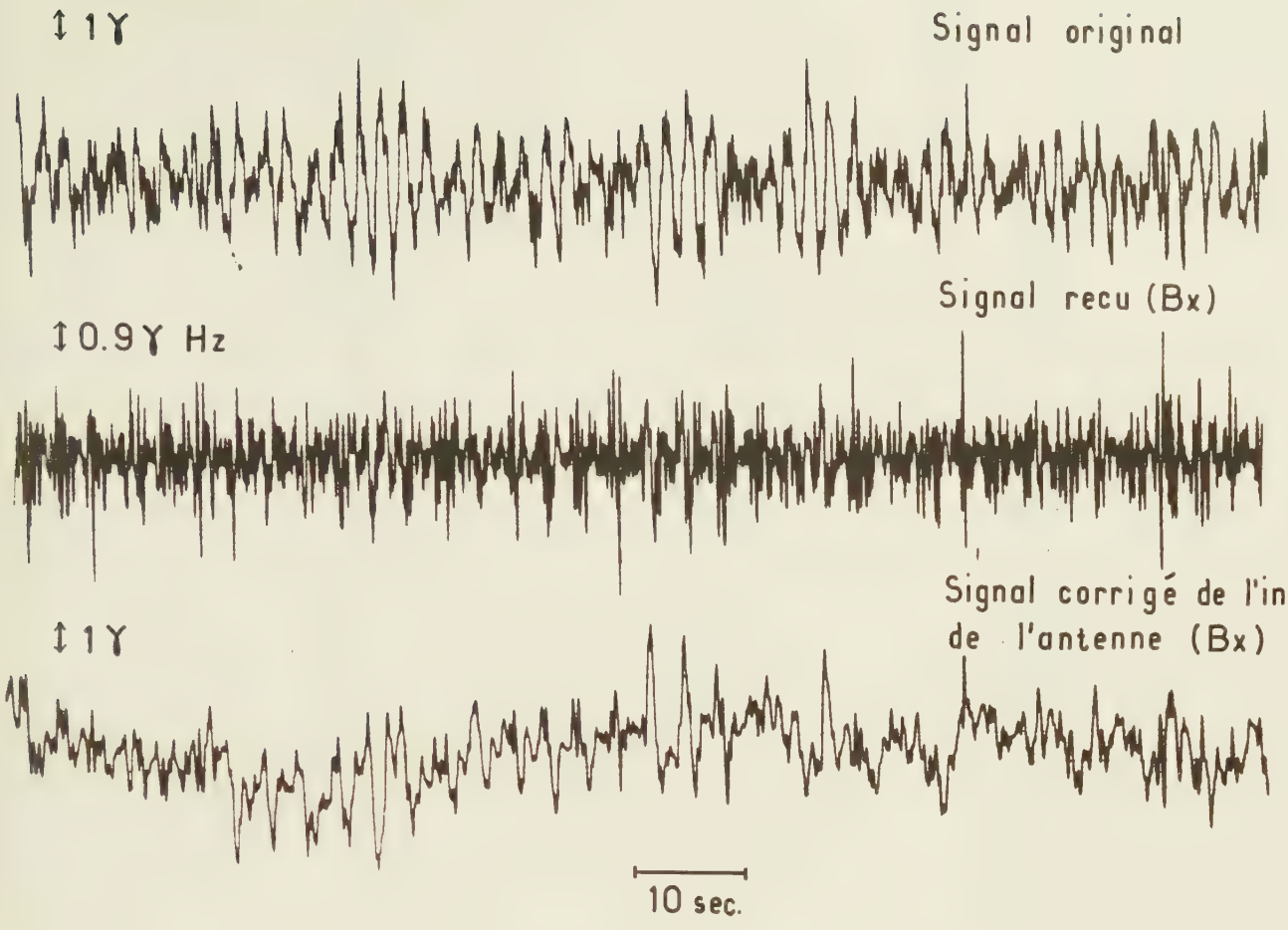

AMPLITUDE (Y/√Hz)
1
0
0.5
1.0
1.5
$B_Y$
1
0
0.5
1.0
1.5
$B_X$
2
0
fs
0.5
1.0
1.5
FREQUENCE (Hz)
---- Signal recu
—— Signal corrigé de l'influence de l'antenne
Signal original

Fig 11_a


↕ 1 γ
Signal original
Signal recu (Bx)
↕ 0.9 γ Hz
Signal corrigé de l'influence
de l'antenne (Bx)
↕ 1 γ
10 sec.

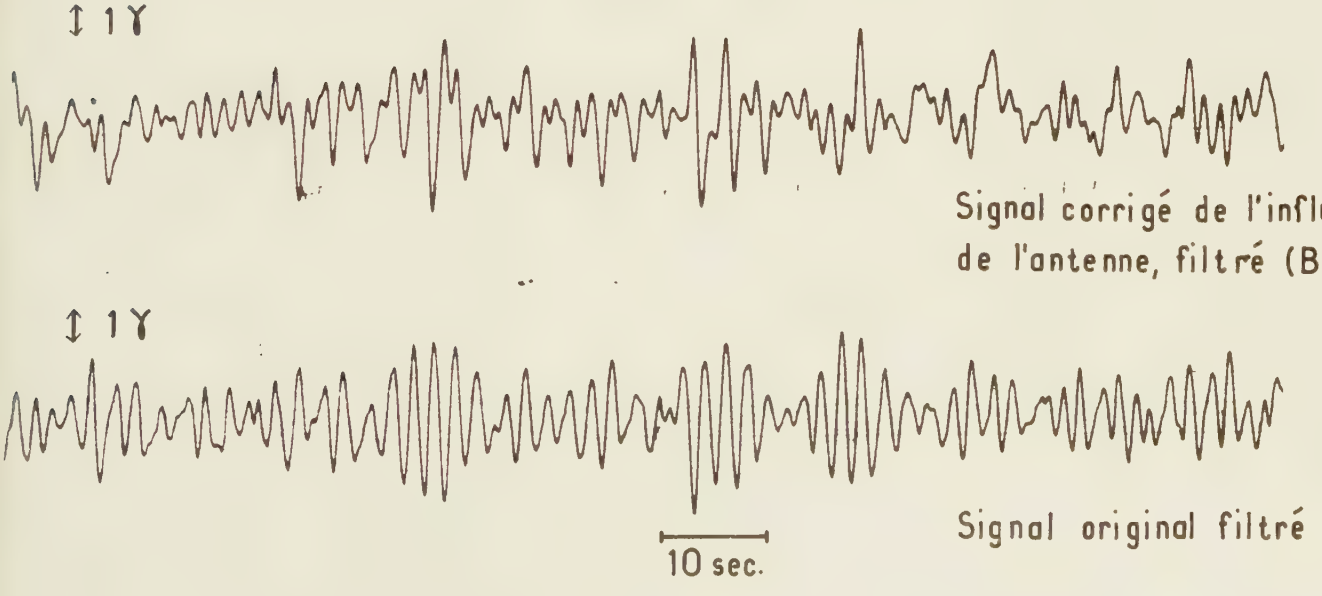

↕ 1 γ
Signal corrigé de l'influence
de l'antenne, filtré (Bx)
↕ 1 γ
10 sec.
Signal original filtré

Fig. 11_b

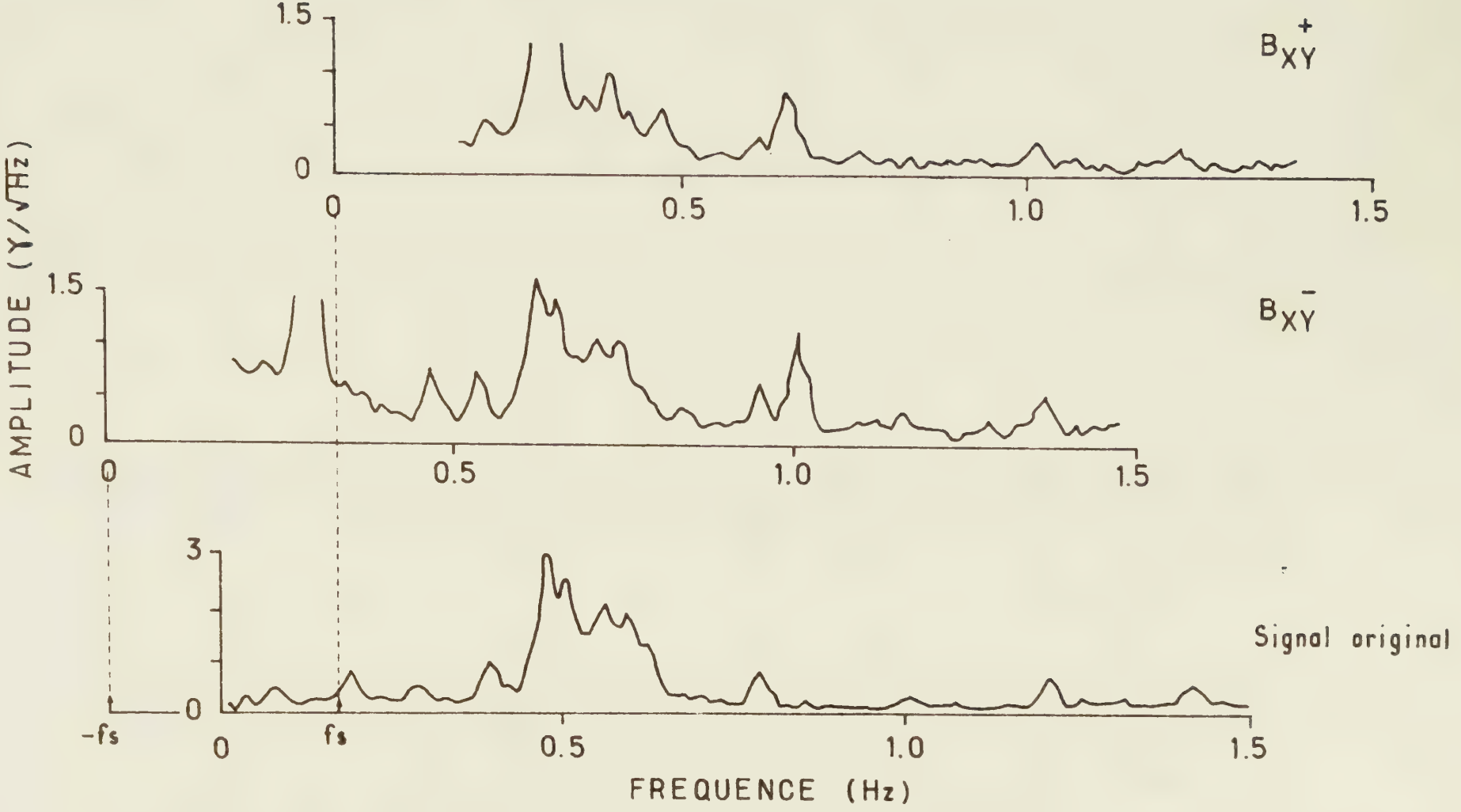

1.5
0
$B_{XY}^{+}$
0
0.5
1.0
1.5
AMPLITUDE (Y/√Hz)
1.5
0
$B_{XY}^{-}$
0
0.5
1.0
1.5
3
0
Signal original
-fs
0
fs
0.5
1.0
1.5
FREQUENCE (Hz)

Fig 12_a

Fig. 12_b

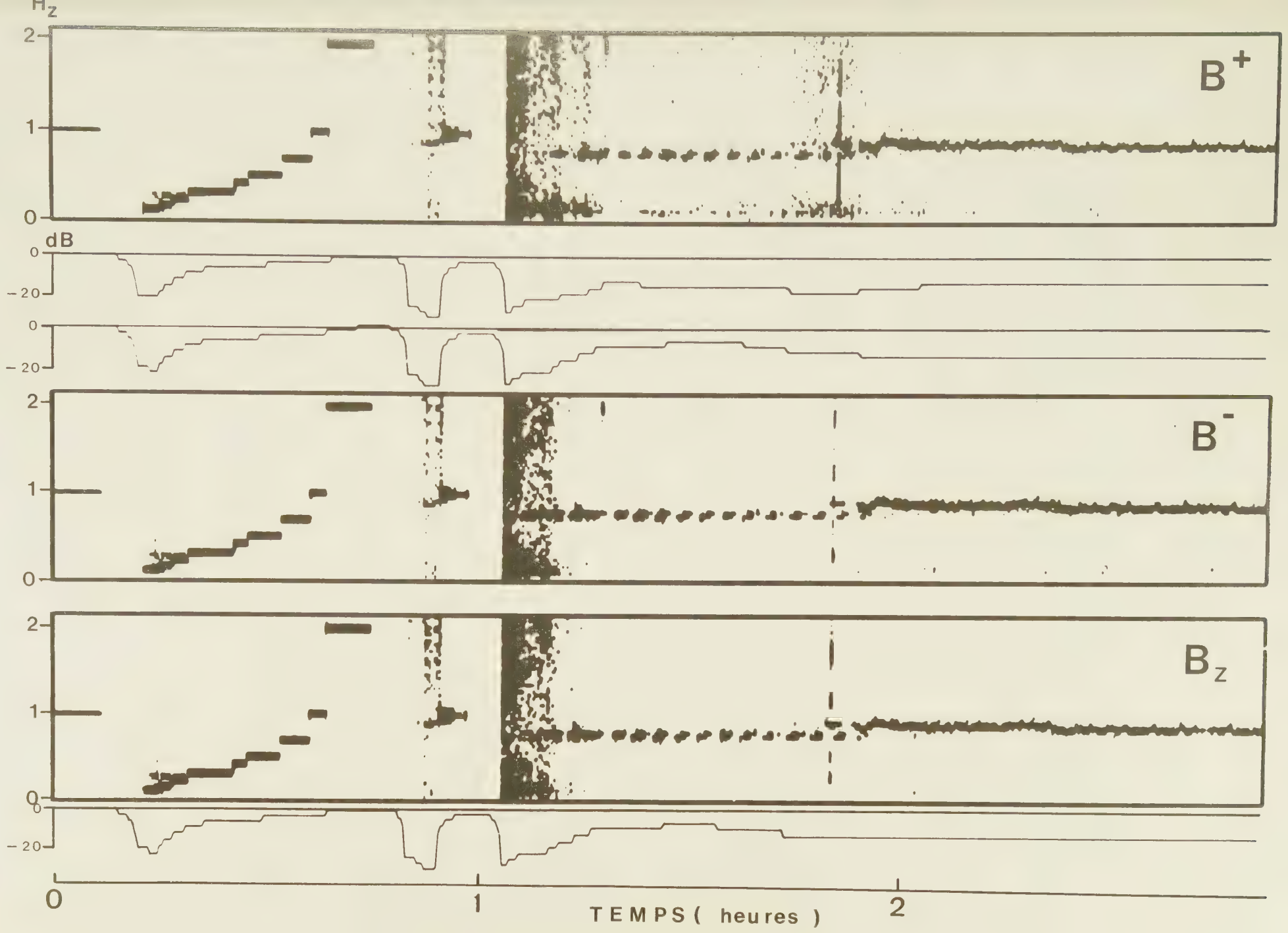

Hz
2
1
0
B+
dB
0
-20
0
-20
2
1
0
B-
2
1
0
Bz
0
-20
0
1
2
TEMPS ( heures )
FREQUENCE ( Hz )

Fig. 13

# R E M E R C I E M E N T S

Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude envers les professeurs J. DELLOUE et M. GARNIER pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux; envers Monsieur L.R.O. STOREY dont les suggestions et les critiques me furent précieuses, envers Monsieur J.L. LACOUME qui m'a enseigné la théorie de la détection et de l'estimation d'un signal; envers Monsieur R. GENDRIN qui m'a aidé à concrétiser des idées parfois trop floues.

Je suis reconnaissant à Monsieur J. HIEBLOT, Directeur du Centre de Recherches en Physique de l'Environnement Terrestre et Planétaire de m'avoir accueilli en son laboratoire. Messieurs M. PETIT et I. REVAH, responsables successifs des départements RSR et ETE du CNET ont toujours eu à coeur de faciliter mes conditions de travail et de séjour, je les en remercie vivement.

Le travail présenté dans ce mémoire a bénéficié de la collaboration de toute l'équipe de Monsieur R. GENDRIN. Je souhaite particulièrement mentionner C. BERTHOMIER et C. de VILLEDARY qui m'ont initié aux problèmes théoriques et pratiques de l'analyse des signaux, S. PERRAUT avec qui j'ai collaboré pour la préparation de l'analyse des données du satellite GEOS, et dont le concours amical m'a permis de comprendre l'apport de ces signaux à la géophysique. Avec G. CHANTEUR et A. ROUX, j'ai eu des échanges intéressants dans une ambiance calme et amicale, et N. CORNILLEAU a su me faire part de son expérience du traitement des données. Mes vifs remerciements vont, au-delà de la Manche, à J. HUNTER, responsable du traitement des données de l'expérience S300 embarquée sur le satellite GEOS, avec qui j'ai étroitement collaboré pour le traitement des données.

Dans une thèse il n'est pas possible (et peut-être n'est-ce pas souhaitable) d'aborder tous les aspects techniques des expériences. Je voudrais cependant témoigner ma gratitude à J.F. KARCZEWSKI qui m'a accueilli au laboratoire, et qui, tout en me faisant découvrir les problèmes de l'influence de la chaîne de mesure pour la détection des signaux, m'a aidé à résoudre les

problèmes, non moins complexes, que rencontre un étranger lors de son séjour; à G. LAURENT et F. GABISON du laboratoire de dépouillement analogique de l'équipe de Monsieur R. GENDRIN; à B. DUBOYS, F.X SENE, J.M. MOREAU du CRPE Orléans; à B. de la PORTE des VAUX, J. ETCHETO, A. MEYER, F. MOURETON du CRPE Issy; à R. RIGUET qui m'a fourni toute l'information nécessaire sur le calculateur analogique qu'il a réalisé.

Je remercie également Mesdames A. KARCZEWSKI et J. JABOIN, bibliothécaires du CRPE, qui m'ont toujours procuré les références nécessaires à mon travail; Madame N. DUPIN, secrétaire de Monsieur R. GENDRIN, pour son amical dévouement. Un travail scientifique d'équipe nécessite, en plus des équations, des échanges d'idées quotidiens, c'est pourquoi je dois beaucoup à C. de VILLEDARY, avec qui j'ai fait l'apprentissage de la langue française; je l'en remercie chaleureusement.

· ⋆ ⊗ ⊕ ⊗ ⋆ ·

Enfin, mes remerciements vont à R. GENDRIN, qui m'a intégré dans une équipe qu'il anime avec un enthousiasme généreux dont je garderai un très vif souvenir lorsque j'aurai quitté la France; qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

謝

⊗ ⊗

⊗